2023 年高三 1 月大联考（全国乙卷）

文科数学·全解全析及评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	C	D	A	A	D	C	D	D	B	C

1．A 【解析】$\because A=\{x|x>0\}$，$B=\{x|-\frac{1}{3}<x<1\}$，$\therefore A\cup B=\{x|x>-\frac{1}{3}\}$，$\therefore \complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\le-\frac{1}{3}\}$，故选 A.

2．B 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，$z+2\bar{z}=3a-bi=3+2i$，则 $a=1,b=-2$，

$\therefore\frac{1}{z}=\frac{1}{1-2i}=\frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+2i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$，故选 B.

3．C 【解析】观察正视图中的木条位置，分析可知侧视图不可能是 A 和 B，观察木条的层次位置，分析可知侧视图也不可能是 D，故选 C.

4．D 【解析】与直线 $l:x-3y=0$ 垂直的直线的斜率为 -3，由于双曲线的焦点在 y 轴上，所以选项 A，B 不满足题意.选项 C 中双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，所以选项 C 不满足题意．故选 D.

5．A 【解析】设正三角形 ABC 的边长为 a，则勒洛三角形 ABC 的面积为 $S_1=2(\frac{1}{6}\pi a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)+\frac{1}{6}\pi a^2=\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.$\triangle ABC$ 的面积为 $S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.所以在勒洛三角形 ABC 内投掷一点，则此点落入 $\triangle ABC$ 内的概率为 $P=\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi-2\sqrt{3}}$，故选 A.

6．A 【解析】由 $\sin\alpha-2\cos\alpha=0$，得 $\tan\alpha=2$，

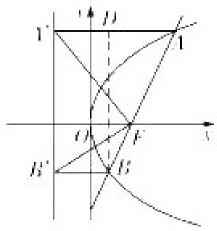
所以 $\sqrt{2}\cos(2\alpha-\frac{\pi}{4})=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2\times2+1-2^2}{2^2+1}=\frac{1}{5}$.

故选 A.

7．D 【解析】由题中的程序框图可知，初始值 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$，第一次循环，$a=3-2=1$，$b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$，$a<b$ 不成立；第二次循环，$a=3-1=2$，$b=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，$a<b$ 不成立；第三次循环，$a=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，$b=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$，$a<b$ 不成立；第四次循环，$a=3-\frac{2}{5}=\frac{13}{5}$，$b=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$，此时 $a<b$ 成立，输出 $a=\frac{13}{5}$，故选 D.

8．C 【解析】由 $f(2-2x)=f(2x)$，得函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，从而函数 $g(x)=(x-a)^2+x-b=x^2+(1-2a)x+a^2-b$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，得 $1-2a=-2$，则 $a=\frac{3}{2}$. 又 $f(0)+f(2)=2f(0)=2\times 2^{a^2-b}=2\times 2^{\frac{9}{4}-b}=4$，所以 $b=\frac{5}{4}$，所以 $a+b=\frac{11}{4}$，故选 C. 来源：高三答案公众号

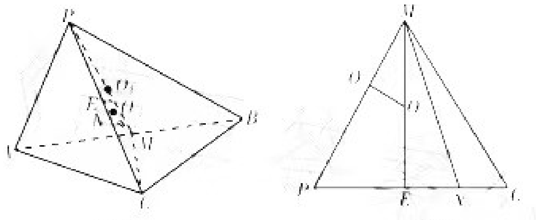
9. D 【解析】如图，由抛物线定义知，$|AF|=|AA'|$，$|BF|=|BB'|$，$\angle A'AF=\alpha, \angle B'BF=\pi-\alpha$，$S_{\triangle AA'F}=\frac{1}{2}|AF|^2\sin\alpha$，$S_{\triangle BB'F}=\frac{1}{2}|BF|^2\sin(\pi-\alpha)$. $\because S_{\triangle AA'F}=2S_{\triangle BB'F}$，$\therefore |AF|^2=2|BF|^2$，$\therefore |AF|=\sqrt{2}|BF|$. 过点 B 作 $BD\perp AA'$ 于点 D，则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\cos\alpha=\frac{|AA'|-|BB'|}{|AB|}=\frac{|AF|-|BF|}{|AF|+|BF|}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$，故选 D.



10. D 【解析】当 $n\ge 2$ 时，$T_{n-1}=2^{(n-1)^2}$，所以当 $n\ge 2$ 时，$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{2^{n^2}}{2^{(n-1)^2}}=2^{2n-1}$，当 $n=1$ 时，$a_1=2$，满足 $a_n=2^{2n-1}$，所以 $a_n=2^{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\frac{1}{a_n}=(\frac{1}{2})^{2n-1}$，$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{4}$，所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列，则 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{4^n})<\frac{2}{3}$. 由题意，只需令 $\frac{2}{3}\le\log_m\sqrt[3]{4}=\frac{2}{3}\log_m 2$，即 $\log_m 2\ge 1$，当 $0<m<1$ 时，$\log_m 2<0$，舍去；当 $m>1$ 时，得 $m\le 2$，则 $1<m\le 2$，故选 D.

11. B 【解析】令 $u(x)=f(g(x))=\ln(x^2-x-2)$，定义域为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，且满足 $u(\frac{1}{2}+x)=u(\frac{1}{2}-x)$，则 $u(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，且在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，故①正确，②错误；令 $v(x)=g(f(x))=(\ln x)^2-\ln x-2$，令 $\ln x=t$，则 $h(t)=t^2-t-2$，所以当 $t>\frac{1}{2}$ 时，$h(t)$ 单调递增，当 $t<\frac{1}{2}$ 时，$h(t)$ 单调递减，所以 $v(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递减，在 $[\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递增，且 $v(\frac{1}{e})=v(e^2)=0$，$v(\sqrt{e})=-\frac{9}{4}<0$，故③正确，④错误，故选 B.

12．C 【解析】如图（1），连接 PM,CM,由三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为 6π，得三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径 $R=\sqrt{\frac{6\pi}{4\pi}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.因为 M 为 AB 的中点，$AC=BC=PA=PB=\sqrt{5},AB=\sqrt{2}$，所以 $PM=CM=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $\triangle PMC$ 是等腰三角形，所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心在 $\triangle PMC$ 的 PC 边的中线上如图（2），设 PC 的中点为 E，连接 ME，则球心在线段 ME 上，MN 的最小值即为 ME 的长.设球心为 O，$\triangle PAB$ 外接圆圆心为 O_1.连接 OO_1.因为 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，所以点 O_1 在中线 PM 上.由 $PA=PB=\sqrt{5},AB=\sqrt{2}$，得 $\cos\angle APB=\frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB}=\frac{4}{5}$，则 $\sin\angle APB=\frac{3}{5}$，则 $\triangle PAB$ 外接圆的半径 $r=\frac{AB}{2\sin\angle APB}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$，所以 $O_1M=PM-r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，易求得 $OO_1=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{1}{3}$，所以 $OM=\sqrt{OO_1^2+O_1M^2}=1$，在 $Rt\triangle OO_1M$ 中，$\cos\angle O_1MO=\frac{O_1M}{OM}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $ME=PM\cdot\cos\angle O_1MO=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2$.故选C.来源：高三答案公众号



图（1）　　图（2）

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\frac{\sqrt{10}}{10}$ 【解析】因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{10}\times2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，故填 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

14．4039 【解析】方法一：由题意，知 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，$\frac{S_1}{1}=-5$，$\frac{S_2}{2}=-4$，所以 $\frac{S_n}{n}=-5+n-1=n-6$，即 $S_n=n^2-6n$.当 $n\geq2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2-6(n-1)$，以上两式相减，得 $a_n=2n-7$（$n\geq2$）.又 $a_1=-5$ 也适合上式，所以 $a_n=2n-7$，所以当 $n=2023$ 时，$a_{2023}=2\times2023-7=4039$，故填4039.

方法二：由题意，知 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，所以数列 $\{a_n\}$ 也是等差数列，所以数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=-3+5=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)\times2=2n-7$，所以 $a_{2023}=2\times2023-7=4039$，故填4039.

15．$\frac{1}{2}$ 【解析】由题意知，$f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+2\cos\omega x$

$=2(\sin\omega x\cos\frac{\pi}{6}+\cos\omega x\sin\frac{\pi}{6})+2\cos\omega x$

$=\sqrt{3}\sin\omega x+3\cos\omega x$

$=2\sqrt{3}\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$，

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3},0)$ 中心对称，所以 $f(\frac{2\pi}{3})=0$，所以 $\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=\frac{3k}{2}-\frac{1}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以 ω 正的最小值为 $\frac{1}{2}$，故填 $\frac{1}{2}$。

16．$[\frac{1}{e},e]$ 【解析】由 $f(x)\ge 0$，得 $(1-e)\ln a\ge\frac{1}{a}e^{x-1}+e(x-1)-x$，化简得 $\ln a-e\ln a\ge e^{\ln\frac{1}{a}}e^{x-1}+ex-e-x$ $=e^{x-1-\ln a}+ex-e-x$，即 $e(1-x-\ln a)\ge e^{1-x-\ln a}-x-\ln a$，也即 $e(1-x-\ln a)+1\ge e^{1-x-\ln a}+1-x-\ln a$，令 $t=1-x-\ln a$，得 $et+1\ge e^{t}+t$，设 $g(t)=et+1-e^{t}-t$，则 $g'(t)=e-e^{t}-1$，显然 $g'(t)=e-e^{t}-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，又 $g'(0)=e-2>0$，$g'(1)=-1<0$，则 $\exists t_0\in(0,1)$，使 $g'(t_0)=0$，故当 $t\in(-\infty,t_0)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)=et+1-e^{t}-t$ 单调递增，当 $t\in(t_0,+\infty)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)=et+1-e^{t}-t$ 单调递减，又 $g(0)=0,g(1)=0$，所以 $0\le t=1-x-\ln a\le 1$，所以 $\exists x\in[0,1]$，使得 $-x\le\ln a\le 1-x$，所以 $-1\le\ln a\le 1$，解得 $\frac{1}{e}\le a\le e$，故填 $[\frac{1}{e},e]$。

说明：第13题可填 $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 也给分，

第15题写成0.5也给分，

第16题写成 $\{x|\frac{1}{e}\le x\le e\}$ 也给分。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须做答。第22、23题为选考题，考生根据要求做答。

（一）必考题：共60分。

17．（12分）

【解析】（1）$\because a\cos(\frac{\pi}{2}-B)=b\cos(\frac{\pi}{6}-A)$，$\therefore a\sin B=b(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)$，（2分）

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $a\sin B=b\sin A$，（3分）

$\therefore b(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)=b\sin A$，$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\frac{1}{2}\sin A$，（4分）

即 $\tan A=\sqrt{3}$，（5分）

又$0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．（6分）

（2）在$\triangle ABC$中，由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$及$A=\dfrac{\pi}{3}$，（7分）

得$a^2+bc=b^2+c^2=8$．（8分）

又$b^2+c^2\geq 2bc$，（9分）

当且仅当$b=c=2$时取等号，$\therefore bc\leq 4$．（10分）

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A\leq\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，（11分）

即当$b=c=2$时，$\triangle ABC$的面积最大，为$\sqrt{3}$．（12分）

说明：第（1）问的另解：

$\because a\cos(\dfrac{\pi}{2}-B)=b\cos(\dfrac{\pi}{6}-A)$，$\therefore a\sin B=b(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A)$，（2分）

即$a\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\cos A+\dfrac{1}{2}b\sin A$，结合正弦定理，得$\sin A\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos A+\dfrac{1}{2}\sin B\sin A$，

$\therefore\dfrac{1}{2}\sin B\sin A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos A=0$，又$\sin B>0$，所以$\tan A=\sqrt{3}$．（5分）

又$0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．（6分）

第（2）问没有与试卷条件[illegible]

18．（12分）

【解析】（1）由题意，得

$K^2=\dfrac{120\times(40\times 40-20\times 20)^2}{60\times 60\times 60\times 60}$（2分）

$=\dfrac{40}{3}$

≈ 13.333（3分）

>10.828，（4分）

所以有99.9%的把握认为教师是否经常使用多媒体教学与教师年龄有关．（5分）

（2）抽取的6名教师中，经常使用多媒体教学的教师人数为$6\times\dfrac{40}{40+20}=4$，

不经常使用多媒体教学的教师人数为$6\times\dfrac{20}{40+20}=2$．（6分）

设经常使用多媒体教学的4名教师分别为A_1，A_2，A_3，A_4，不经常使用多媒体教学的2名教师分别

为B_1，B_2．（7分）

从这6人中随机抽取2人有下列情况：(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，

(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,A_4)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_4,B_1)，(A_4,B_2)，(B_1,B_2)，共15种，（10分）

抽取的2名教师都是经常使用多媒体教学的情况有：(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，

(A_3,A_4)，共6种，（11分）

所以抽取的2名教师都是经常使用多媒体教学的概率为 $P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$．（12分）

说明：

第（1）问解答中，未写出"≈ 13.333"，但比较大小正确，不扣分。

第（2）问解答过程中，若由"经常使用多媒体教学的教师人数为4，不经常使用多媒体教学的教师人数为2"正确，但没有用古典概型计算，不扣分；未逐一列出基本事件，但写出基本事件总数为15，可给1分；若列出基本事件，但基本事件总数不对，只给第1分（10分在11分段），若列出基本事件，但符合6种，[illegible]，最后答案正确，[illegible]。

19．（12分）

【解析】（1）如图，设 P 为 EF 的中点，连接 BP、DP，AC．

$\because AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF/\!/AE$，$CF=AE$，

$\therefore$ 四边形 $ACFE$ 为矩形．

$\because AB$、$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AE\perp AB$，$AE\perp BC$，$\therefore CF\perp BC$，

$\therefore BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore BE=BF$，$\therefore BP\perp EF$，（2分）

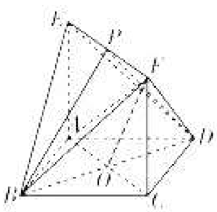
且 $BP=\sqrt{BF^2-PF^2}=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=1$．

同理，可得 $DP\perp EF$，且 $DP=1$．（3分）

又 $BD=\sqrt{2}$，$\therefore BP^2+DP^2=BD^2$，$\therefore BP\perp DP$．（5分）

$\because EF$、$DP\subset$ 平面 DEF，且 $EF\cap DP=P$，$\therefore BP\perp$ 平面 DEF．又 $BP\subset$ 平面 BEF，

$\therefore$ 平面 $BEF\perp$ 平面 DEF．（6分）



（2）由题意，知当点 M 在点 A 位置时，到平面 BDF 的距离最小，设长度为 d_1；在点 E 位置时，到平面 BDF 的距离最大，设长度为 d_2．

设 O 为线段 BD 的中点，由（1）知 $BF=DF$，则 $OF\perp BD$，$OF=\sqrt{BF^2-BO^2}=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=1$，

$\because \triangle BDF$ 的面积 $S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}BD\cdot OF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\triangle DEF$ 的面积 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}EF\cdot DP=\frac{\sqrt{2}}{2}$，（7 分）

$\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}$，

$V_{A-BDF}=V_{F-ABD}$，即 $\frac{1}{3}S_{\triangle BDF}\cdot d_1=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot CF$，解得 $d_1=\frac{1}{2}$.（9 分）

$\because V_{E-BDF}=V_{B-DEF}$，即 $\frac{1}{3}S_{\triangle BDF}\cdot d_2=\frac{1}{3}S_{\triangle DEF}\cdot BP$，解得 $d_2=1$，（11 分）

$\therefore$ 点 M 到平面 BDF 距离的取值范围为 $[\frac{1}{2},1]$.（12 分）

说明：第（2）问，由题 $BD\perp$ 平面 $AEFC$，（8 分）
点 M 到平面 BDF 的距离即为点 M 到直线 OF 的距离，（9 分）

点 A 到直线 OF 的距离为 $\frac{1}{2}$，（10 分）

点 E 到直线 OF 的距离为 1，（11 分）

$\therefore$ 点 M 到平面 BDF 距离的取值范围为 $[\frac{1}{2},1]$.（12 分）

20.（12 分）

【解析】（1）对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=e^x-2$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$.（1 分）

当 x 变化时，$f'(x)$ 及 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

$\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(\ln 2)=2-2\ln 2$，没有极大值.（4 分）

（2）当 $x\ge 1$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=(a-2)x-\ln x-e-a(a\in\mathbf{R})$ 有且只有一个实数解，

即 $e^x+\ln x-e-a(x-1)=0(x\ge 1)$ 只有一个实数解.

令 $h(x)=e^x+\ln x-e-a(x-1)(x\ge 1)$，

则 $h'(x)=e^x+\frac{1}{x}-a$，令 $g(x)=e^x+\frac{1}{x}-a$，

则 $g'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$，（6 分）

当 $x\ge 1$ 时，$g'(x)>0$，$h'(x)$ 单调递增，

$h'(x)_{\min}=h'(1)=e+1-a$，

①当$e+1-a\geq 0$时，即$a\leq e+1$时，$h'(x)\geq 0$，

$\therefore h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

$\because h(1)=0$，$\therefore h(x)\geq 0$，

只有一个零点，符合题意．（8分）

②当$a>e+1$时，

由$h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-a>e^x-a>0$，得$x>\ln a$，

取$x=\ln a$，则$h'(\ln a)=\dfrac{1}{\ln a}>0$，

又$h'(1)=e+1-a<0$，

$\therefore \exists x_0\in[1,\ln a)$，使$h'(x_0)=0$，

当$x\in[1,x_0)$时，$h'(x)<0,h(x)$单调递减，

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0,h(x)$单调递增，

$\because h(1)=0$，$\therefore$当$x\in[1,x_0)$时，$h(x)<0$，

$h(x)=e^x+\ln x-e-a(x-1)$

$=e^x+\ln x-e-ax+a$

$>e^x+\ln x-ax$

$>e^x-ax$

$>x^2-ax>0$，

解得$x>a$，

取$x=a$，则$h(a)=e^a+\ln a-e-a(a-1)>\ln a>0$，

$\therefore \exists x_1\in[1,a)$，使$h(x_1)=0$，不合题意，舍去．

综上可知，$a\in(-\infty,e+1]$．（12分）

说明：第（1）问中没有列表，可结合数感，且正确，同样给分．

第（2）问：因为$h(1)=0$，如果直接由端点效应得$h'(1)=e^x+\dfrac{1}{x}-a\geq 0$，$a\leq e+1$，没有充分条件（分类讨论）来说明$a>e+1$不符合题意，则第（2）问只得2分．

对$h(x)=e^x+\ln x-e-a(x-1)$，没有直接放缩，但有$h(a)=e^a+\ln a-e-a(a-1)>\ln a>0$，则不扣分．

21．（12分）

【解析】（1）依题意，得 $A(-a,0),B(0,b)$，设 $|MB|=\lambda$，则 $|AM|=2\lambda$，$|AB|=3\lambda$，$a^2+b^2=(3\lambda)^2$ ①，

（1分）

由 $AB\perp OM$，知 $|OM|^2=|OA|^2-|AM|^2=|OB|^2-|MB|^2$，$\therefore a^2-(2\lambda)^2=b^2-\lambda^2=\frac{4}{3}$ ②，（3分）

由①②，解得 $a^2=4,b^2=2$，（4分）

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．（5分）

（2）方法一：①当直线 EF 的斜率不存在时，即 $EF\perp x$ 轴时，$P(\frac{2}{3}\sqrt{3},0)$ 或 $P(-\frac{2}{3}\sqrt{3},0)$，直线 EF 的方程为 $x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 或 $x=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$，代入方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 中，得 $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$，所以 $|PE|\cdot|PF|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}$．（6分）

②当直线 EF 的斜率存在时，设直线 EF 的方程为 $y=kx+m$，$E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$．

$\because$ 直线 EF 与圆 $O:x^2+y^2=\frac{4}{3}$ 相切于点 P，$\therefore$ 圆心 O 到 EF 的距离 $|OP|=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

即 $m^2=\frac{4}{3}(k^2+1)(*)$，（7分）

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

$\Delta=8(4k^2-m^2+2)=\frac{16}{3}(4k^2+1)>0$ 恒成立，且 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，（8分）

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$，

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(1+k^2)\frac{2m^2-4}{1+2k^2}-\frac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\frac{3m^2-4k^2-4}{1+2k^2}$．

将（*）式代入上式，得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，$\therefore OE\perp OF$．（10分）

又 $\because OP\perp EF$，$\therefore\triangle OPF\backsim\triangle EPO$，$\therefore\frac{|PF|}{|OP|}=\frac{|OP|}{|PE|}$，

$\therefore|PE||PF|=|OP|^2=\frac{4}{3}$．

综上可得，$|PE||PF|$ 为定值 $\frac{4}{3}$．（12分）

方法二：设 $P(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta,\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta)$，直线 EF 的倾斜角为 α，则 EF 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta+t\cdot\cos\alpha\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta+t\cdot\sin\alpha\end{cases}$

（t为参数），代入椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，（6分）

整理，得$(\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha)t^2+(\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\theta\cos\alpha+\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\theta\sin\alpha)t+\frac{4}{3}\cos^2\theta+\frac{8}{3}\sin^2\theta-4=0$，（8分）

设点E、F对应的参数分别为t_1、t_2，

$$\therefore |PE|\cdot|PF|=|t_1\cdot t_2|=\frac{\left|\frac{4}{3}\cos^2\theta+\frac{8}{3}\sin^2\theta-4\right|}{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}=\frac{4}{3}\times\frac{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}$$ （10分）

$\because OP\perp EF$，$\therefore \sin^2\theta=\cos^2\alpha$，$\cos^2\theta=\sin^2\alpha$，$\therefore |PE|\cdot|PF|=\frac{4}{3}$，是定值．（12分）

说明：第（1）问的解答中，另解

直线AB的方程为：$\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$，即$bx-ay-ab=0$，（1分）

圆心$(0,0)$到直线AB的距离为：$d=\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，即$4(b^2+a^2)=3a^2b^2$，①（2分）

由$|AM|=2|BM|$，则$\sqrt{a^2-\frac{4}{3}}=2\sqrt{b^2-\frac{4}{3}}$，即$a^2+4=4b^2$，②（3分）

由①②解得$a^2=4,b^2=2$，（4分）

$\therefore$椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．（5分）

第（2）问解答中：

当P为点M时，$|PE|=|MA|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$|PF|=|MB|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，得到$|PE||PF|=\frac{4}{3}$，此处给1分，如果一般性计算正确，此处不再重复给分．

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．（10分）[选修4-4：坐标系与参数方程]

【解析】（1）由$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$得，$\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，（1分）

将$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，代入得$y^2=4x$，（2分）

当$\varphi=\frac{\pi}{4}$时，$\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，（3分）

消去t，得$x-y-1=0$，

$\therefore$曲线C的直角坐标方程为$y^2=4x$，直线l的普通方程为$x-y-1=0$．（4分）

（2）设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，将 $\begin{cases} x=1+t\cos\varphi \\ y=t\sin\varphi \end{cases}$ 代入 $y^2=4x$ 得，

$t^2\sin^2\varphi-4t\cos\varphi-4=0$，（5 分）

$\therefore t_1+t_2=\dfrac{4\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$，$t_1t_2=\dfrac{-4}{\sin^2\varphi}<0$，$\therefore t_1,t_2$ 异号，（6 分）

$\therefore ||AF|-|BF||=||t_1|-|t_2||=|t_1+t_2|=\dfrac{8}{3}$，（7 分）

$\therefore |\dfrac{4\cos\varphi}{\sin^2\varphi}|=\dfrac{8}{3}$，（8 分）

解得 $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$，（9 分）

$\because \varphi\in(0,\pi)$，$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore$ 直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$．（10 分）

说明：第（1）问解答中

当 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 时，直线普通方程 $x-y-1=0$ 得1分．

第（2）问解答中：

$\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$ 与 $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$ 只得到一个，扣1分；$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 与 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ 中，只得到一个答案，扣1分．

23．（10 分）[选修 4-5：不等式选讲]

【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=|x+1|+2|x|$，

当 $x<-1$ 时，不等式 $f(x)\le 4$ 等价于 $-x-1-2x\le 4$，解得 $x\ge -\dfrac{5}{3}$，则 $-\dfrac{5}{3}\le x<-1$；（2 分）

当 $-1\le x\le 0$ 时，不等式 $f(x)\le 4$ 等价于 $x+1-2x\le 4$，解得 $x\ge -3$，则 $-1\le x\le 0$；（3 分）

当 $x>0$ 时，不等式 $f(x)\le 4$ 等价于 $x+1+2x\le 4$，解得 $x\le 1$，则 $0<x\le 1$．（4 分）

综上可得，不等式 $f(x)\le 4$ 的解集为 $[-\dfrac{5}{3},1]$．（5 分）

（2）方法一：当 $a<0$ 时，$-\dfrac{1}{a}>0$，则 $f(x)=\begin{cases} (a-2)x+1, x\le 0 \\ (a+2)x+1, 0<x<-\dfrac{1}{a} \\ (-a-2)x-1, x\ge -\dfrac{1}{a} \end{cases}$，

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,-\dfrac{1}{a})$ 上是单调的函数或常函数，在 $(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f(x)$ 的

最小值为 $\min\{f(0),f(-\dfrac{1}{a})\}$，$\because f(0)=1$，要使 $f(x)$ 的最小值为1，则 $f(-\dfrac{1}{a})=-\dfrac{2}{a}\ge 1$，$\therefore -2\le a<0$；（7 分）

当$a=0$时，$f(x)=2|x|+1$，其最小值为1，符合题意；（8分）

当$a>0$时，$-\frac{1}{a}<0$，则$f(x)=\begin{cases}(-a-2)x-1, x\le -\frac{1}{a}\\(a-2)x+1, -\frac{1}{a}<x<0\\(a+2)x+1, x\ge 0\end{cases}$，

$f(x)$在$(-\infty,-\frac{1}{a})$上单调递减，在$(-\frac{1}{a},0)$上是单调的函数或常函数，在$(0,+\infty)$上单调递增，

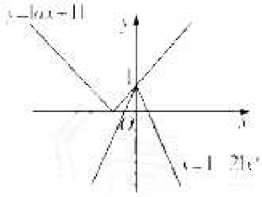
$\therefore f(x)$的最小值为$\min\{f(0),f(-\frac{1}{a})\}$，$\because f(0)=1$，要使$f(x)$的最小值为1，则$f(-\frac{1}{a})=\frac{2}{a}\ge 1$，$\therefore 0<a\le 2$.

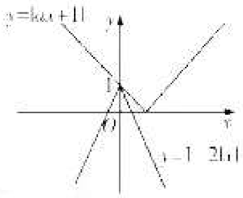
（9分）

综上可得，实数a的取值范围是$[-2,2]$．（10分）

方法二：若$f(x)$的最小值为1，则$f(x)=|ax+1|+2|x|\ge 1$恒成立，（6分）

即$|ax+1|\ge 1-2|x|$，分别作出函数$y=|ax+1|$和$y=1-2|x|$的图象，（8分）





由图分析可知，当$-2\le a\le 2$时，$|ax+1|\ge 1-2|x|$恒成立，

所以实数a的取值范围是$[-2,2]$．（10分）

说明：第(2)问用方法二解答时，未作图扣1分．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。