

达州市普通高中 2023 届第二次诊断性测试

文科数学参考答案

一、选择题：

1. B 2. B 3. A 4. D 5. C 6. C 7. C 8. A 9. A 10. B 11. B 12. A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -1 14. $[2\sqrt{2}, +\infty)$ 15. $\frac{\pi}{3}$ 16. $[\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{9}]$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 证明： $\because S_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{5}{4}n$, $\therefore a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{1}{4}(n-1)^2 + \frac{5}{4}(n-1)$, $\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}n + 1$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{2}n + 1$,

(2) 解： $\because b_n = 2^{a_n}$, $a_{2n} = n + 1$, $\therefore b_n = 2^{n+1}$.

$\therefore T_n = \frac{4 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 2^{n+2} - 4$,

$T'_n = 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{n+1} = 2^{2+3+\cdots+(n+1)} = 2^{\frac{[2+(n+1)]n}{2}} = 2^{\frac{n^2+3n}{2}}$.

$\therefore T_n + T'_n = 2^{n+2} + 2^{\frac{n^2+3n}{2}} - 4$.

18. 解：(1) 由图知 $a = \frac{1}{40} - 0.0025 - 0.0050 - 0.0100 = 0.0075$.

根据表和图得 2022 年这批流转土地总利润为

$5000 \times 40(0.0050 \times 40 + 0.0075 \times 50 + 0.0100 \times 60 + 0.0025 \times 70) = 27$ 万元.

所以甲、乙 2022 年所获土地流转收益均为 $27 \times 7\% = 1.89$ 万元, 丙 2022 年所获土地流转收益为 $27 \times 10\% = 2.7$ 万元, 丁 2022 年所获土地流转收益为 $27 \times 6\% = 1.62$ 万元.

(2) 在甲、乙、丙、丁中随机抽取 2 户, 所有可能结果为: 甲乙, 甲丙, 甲丁, 乙丙, 乙丁, 丙丁 6 个结果情况, 其中甲丙, 乙丙, 丙丁中恰有 1 户土地流转收益超过 2 万元.

设事件 M 表示“这 2 户中恰有 1 户 2022 年土地流转收益超过 2 万元”, 则

$P(M) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

所以这 2 户中恰有 1 户 2022 年土地流转收益超过 2 万元的概率为 $\frac{1}{2}$.

19. (1) 证明： $\because PA = PD$, O 是 AD 的中点, $\therefore PO \perp AD$.

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PO \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$.

$\because BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PO \perp BD$.

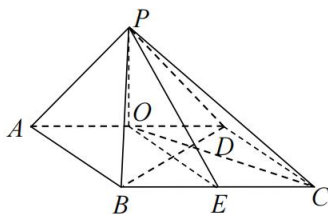
设 $AB = a$, 则 $AD = 2a$. $\angle BAD = 60^\circ$, 在 $\triangle ABD$ 中, 由

余弦定理得 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD = 3a^2$,

$\therefore AB^2 + BD^2 = AD^2$, $\therefore AB \perp BD$.

$\because E$ 是 BC 中点, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

文科数学答案 第 1 页(共 4 页)



$\therefore OE \parallel AB, \therefore BD \perp OE$.

$\therefore PO, OE$ 是平面 POE 内两相交直线,

$\therefore BD \perp$ 平面 POE .

(2)解: 连接 OC .

$\therefore O, E$ 分别是 AD, BC 中点, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore OE \parallel DC$.

$\therefore OE \not\subset$ 平面 $PDC, DC \subset$ 平面 $PDC, \therefore OE \parallel$ 平面 PDC .

$\therefore$ 点 E 到平面 PCD 的距离等于点 O 到平面 PCD 的距离.

$\therefore PA = PD = 2\sqrt{2}, AD = 2AB = 4, \therefore PO = OD = DC = 2,$

$\therefore OC^2 = OD^2 + DC^2 - 2OD \cdot DC \cos 120^\circ = 12,$

$\therefore PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = 4.$

在 $\triangle PCD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle PCD = \frac{PC^2 + CD^2 - PD^2}{2PC \cdot CD} = \frac{3}{4},$

$\therefore \sin \angle PCD = \frac{\sqrt{7}}{4}, \therefore \triangle PCD$ 的面积 $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} PC \cdot CD \sin \angle PCD = \sqrt{7}.$

设 O 到平面 PCD 的距离为 d , 因三棱锥 $O-PCD$ 与三棱锥 $C-POD$ 是同一三棱锥, 所以

$V_{O-PCD} = V_{C-POD}$, 即

$\frac{1}{3} S_{\triangle PCD} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle POD} \cdot AB \sin \frac{\pi}{3}, \therefore \sqrt{7}d = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$

解得 $d = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$

所以点 E 到平面 PCD 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}.$

20. 解: (1)由题意得 $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}, \therefore p = \frac{1}{2}.$

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2 = x.$

$\therefore y_0^2 = x_0. \quad ①$

当 $y > 0$ 时, 由 C 的方程得 $y = \sqrt{x}, y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \therefore \frac{y_0 - \frac{3}{8}}{x_0 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \quad ②$

由①②解得 $x_0 = 1, y_0 = 1$, 即 M 点坐标为 $(1, 1).$

(2)设直线 AB 的方程为 $x = ty + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2).$

由方程组 $\begin{cases} x = ty + m, \\ y^2 = x \end{cases}$ 得 $y^2 - ty - m = 0.$

$\therefore \Delta = t^2 + 4m > 0, y_1 + y_2 = t, y_1 y_2 = -m.$

$\therefore \overrightarrow{MA} = (x_1 - 1, y_1 - 1), \overrightarrow{MB} = (x_2 - 1, y_2 - 1), \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0,$

$\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 0,$ 即 $(ty_1 + m - 1)(ty_2 + m - 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 0,$

$\therefore t^2 y_1 y_2 + t(m - 1)(y_1 + y_2) + (m - 1)^2 + y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1 = 0.$

$\therefore -mt^2 + (m - 1)t^2 + (m - 1)^2 - m - t + 1 = 0,$

解得 $m = -t + 1$, 或 $m = t + 2.$

若 $m = -t + 1$, 则直线 AB 的方程为 $x = t(y - 1) + 1$, 直线 AB 经过点 $M(1, 1)$, 不合题意. 所以

$m = t + 2$, 直线 AB 的方程为 $x = t(y + 1) + 2$, 直线 AB 经过定点 $D(2, -1).$

$\therefore$ 点 O 到 AB 的最大距离为 $|OD|$, 直线 OD 的斜率为 $-\frac{1}{2}, \therefore$ 此时 AB 的斜率为 2 , 直线 AB 的

文科数学答案 第2页(共4页)

方程为 $y = 2(x-2) - 1$, 即 $y = 2x - 5$.

21. 解(1)由 $f(x) = \ln x + mx + \frac{e}{2x}$ 得 $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} + m - \frac{e}{2x^2}$.

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的方程为

$$y = (\frac{1}{x_0} + m - \frac{e}{2x_0^2})(x - x_0) + \ln x_0 + mx_0 + \frac{e}{2x_0}.$$

根据条件得 $-x_0(\frac{1}{x_0} + m - \frac{e}{2x_0^2}) + \ln x_0 + mx_0 + \frac{e}{2x_0} = 1$, 即 $\ln x_0 + \frac{e}{x_0} - 2 = 0$.

设 $g(x) = \ln x + \frac{e}{x} - 2$, 则 $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2}$. 当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$

单调递减, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增. 因 $g'(e) = 0$, 所以 $g(x)_{\min} = g(x)_{\text{极小}} = g(e) = 0$, 即 e 是 $g(x)$ 唯一零点.

所以 $x_0 = e$.

(2) 由(1)知, $f'(x) = \frac{2mx^2 + 2x - e}{2x^2}$.

令 $2mx^2 + 2x - e = 0$, 得, $4 + 8me > 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{1}{m}$, $x_1 x_2 = -\frac{e}{2m}$.

$\therefore m = \frac{e-2x}{2x^2}$ ($0 < x < \frac{3e}{2}$) 有两不同解, 令 $t = \frac{1}{x}$, $\therefore m = \frac{e}{2}t^2 - t$ ($t > \frac{2}{3e}$)

$\therefore$ 由图象可得 $-\frac{1}{2e} < m < -\frac{4}{9e}$

$\therefore f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{me^2} = \ln x_1 + mx_1 + \frac{e}{2x_1} + \ln x_2 + mx_2 + \frac{e}{2x_2} = \ln x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) +$

$$\frac{e(x_1 + x_2)}{2x_1 x_2} + \frac{1}{me^2} = \ln(-\frac{e}{2m}) - 1 + 1 + \frac{1}{me^2} = 1 - \ln 2 - [\ln(-m) + \frac{1}{-me^2}].$$

构造函数 $h(x) = \ln x + \frac{1}{e^2 x}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^2 x^2} = \frac{1}{x^2}(x - \frac{1}{e^2})$. 当 $0 < x < \frac{1}{e^2}$ 时, $h'(x) < 0$,

$h(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{e^2}$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

$\therefore \frac{1}{e^2} < \frac{4}{9e^2} < \frac{1}{2e}$, $\therefore h(\frac{1}{2e}) > h(\frac{1}{3e})$

$\therefore h(\frac{1}{2e}) = -\ln 2 - 1 + \frac{2}{e}$,

$\therefore \ln(-m) + \frac{1}{-me^2} < -\ln 2 - 1 + \frac{2}{e}$,

所以 $f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{me^2} > 2 - \frac{2}{e}$.

22. 解: (1) 由曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x = \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 得

$$\sin \alpha = \frac{x+y}{2}, \cos \alpha = \frac{x-y}{2\sqrt{2}}.$$

$\therefore (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2\sqrt{2}})^2 = 1$, 化简得 C 的直角坐标方程为 $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$.

分别将 $x^2 + y^2 = \rho^2$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 代入 C 的直角坐标方程并化简得 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{8}{3 + \sin 2\theta}$ (或 $\rho^2(3 + \sin 2\theta) - 8 = 0$) .

(2) 设点 A , B 极坐标分别为 (ρ_1, β) , (ρ_2, β) , 则 $|AB| = |\rho_1 - \rho_2|$.

由 $\rho^2 = \frac{8}{3 + \sin 2\beta}$ 知, 当 $2\beta = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\beta = k\pi - \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ 时, ρ^2 取得最大值 4. 根

据题意, 不妨取 $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -2$, 所以 $|AB|$ 的最大值为 4.

23. (1) 解: 由 $f(x) = |\frac{1}{2}x - 1|$, $g(x) = |x - m| + m$ 得

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1, & x < 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & x \geq 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -x + 2m, & x < m, \\ x, & x \geq m. \end{cases}$$

由 $-\frac{1}{2}x + 1 = x$ 得 $x = \frac{2}{3}$.

当 $m < \frac{2}{3}$ 时, $f(m) = -\frac{1}{2}m + 1 > \frac{2}{3} > m = g(m)$, 不合题意.

当 $m \geq \frac{2}{3}$ 时, 若 $x < 2$, 则 $f(m) = -\frac{1}{2}m + 1 \leq \frac{2}{3} \leq m = g(m) = g(x)_{\min}$, 若 $x \geq 2$, $f(m) =$

$\frac{1}{2}m - 1 < m = g(m) = g(x)_{\min}$. 由于射线 $y = g(x) (x < m)$ 的斜率 -1 , 小于射线 $y = f(x) (x < 2)$

的斜率 $-\frac{1}{2}$, 射线 $y = g(x) (x \geq m)$ 的斜率 1 , 大于射线 $y = f(x) (x \geq 2)$ 的斜率 $\frac{1}{2}$, 所以 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立.

所以实数 m 的取值范围是 $[\frac{2}{3}, +\infty)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线