树德中学高2021级高二下期5月阶段性测试数学(理科)试题参考答案

一、选择题

CBCDD　CACDA　CB

二、填空题

13、$\frac{5}{2}$　14、8　15、$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$　16、$\left(\frac{7}{2},0\right)$或$\left(\frac{3}{2},0\right)$

17、(1) 因为$f(x)=x^3-x^2-x+c$.

从而$f'(x)=3x^2-2x-1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)$,

令$f'(x)>0$, 得$x<-\frac{1}{3}$或$x>1$, 令$f'(x)<0$, 得$-\frac{1}{3}<x<1$,

所以$f(x)$的单调递增区间是$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$和$(1,+\infty)$;$f(x)$的单调递减区间是$\left(-\frac{1}{3},1\right)$;…… 6分

(2) 函数$g(x)=(f(x)-x^3)\cdot e^x=(-x^2-x+c)\cdot e^x$,

有$g'(x)=(-2x-1)e^x+(-x^2-x+c)e^x=(-x^2-3x+c-1)e^x$,

因为函数在区间$x\in[-3,2]$上单调递增,

等价于$h(x)=-x^2-3x+c-1\geqslant 0$在$x\in[-3,2]$上恒成立,

函数$h(x)=-x^2-3x+c-1$的对称轴为:$x=-\frac{3}{2}$,所以当$x\in[-3,2]$时,

$h(x)_{\min}=h(2)$,只要$h(2)\geqslant 0$,解得$c\geqslant 11$,所以c的取值范围是$[11,+\infty)$. …………………… 12分

18、(1) 因为抽取总问卷为100份,所以$n=100-(40+10+20)=30$.

年龄在$[40,50)$中,抽取份数为10份,答对全卷人数为4人,所以$b=\frac{4}{10}=0.4$.

年龄在$[50,60]$中,抽取份数为20份,答对的概率为0.1,所以$\frac{a}{20}=0.1$,得$a=2$.

根据频率直方分布图,得$(0.04+0.03+c+0.01)\times 10=1$,解得$c=0.02$. …………………… 6分

(2) 因为年龄在$[40,50)$与$[50,60]$中答对全卷的人数分别为4人与2人.

年龄在$[40,50)$中答对全卷的4人记为a_1,a_2,a_3,a_4,年龄在$[50,60]$中答对全卷的2人记为b_1,b_2,

则从这6人中随机抽取2人授予"环保之星"奖的所有可能的情况是:(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,a_4),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_4,b_1),(a_4,b_2),(b_1,b_2),共15种.

其中所抽取年龄在$[50,60]$的人中至少有1人被授予"环保之星"的情况是:(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_4,b_1),(a_4,b_2),(b_1,b_2)共9种.

故所求的概率为$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ………………………………… 12分

19. (1) 取AD的中点O,连接OP,OB,

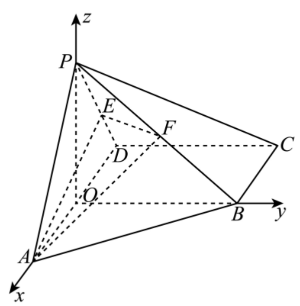
因为在四边形$ABCD$中,$AD\parallel BC,AD=2BC$,

所以$OD\parallel BC,OD=BC$,所以四边形$OBCD$是平行四边形,

所以$OB\parallel CD$,因为$CD\perp$平面PAD,所以$OB\perp$平面PAD,

又$OA,OP\subset$平面PAD,所以$OB\perp OA,OB\perp OP$,

又在等边$\triangle PAD$中,O是AD的中点,所以$OP\perp OA$,



如图以O为原点,OA,OB所在直线为x轴、y轴建立空间直角坐标系,

则$A(1,0,0),B(0,2,0),C(-1,2,0),D(-1,0,0),P(0,0,\sqrt{3})$,

故$E\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),F\left(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{EA}=\left(\frac{3}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,

设平面AEF的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0.\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \frac{1}{2}x+y=0\end{cases}$,可取$\vec{n}=(2,-1,2\sqrt{3})$,

因为$CD\perp$平面PAD,所以$\vec{m}=\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$即为平面$PAD$的一个法向量,

设平面AEF与平面PAD所成的锐二面角为θ,

则$\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{17}}{17}$,

即平面AEF与平面PAD所成的锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{17}}{17}$;………………………………………… 8分

(2) 设点G满足$\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PC}=(-\lambda,2\lambda,-\sqrt{3}\lambda),\lambda\in[0,1]$,

所以$G(-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$,则$\overrightarrow{DG}=(-\lambda+1,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$,

因为$DG\parallel$平面AEF,所以$\overrightarrow{DG}\cdot\vec{n}=2(-\lambda+1)-2\lambda+2\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)=0$,

解得$\lambda=\frac{4}{5}$,即棱PC上存在点G,使得$DG\parallel$平面AEF,且$\frac{PG}{PC}=\frac{4}{5}$. ……………………………… 12分

20. (1)设$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$的夹角为$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,

则$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$, 所以$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2}}$,

则$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$;………………………………………… 6分

(2)由$\begin{cases}y=kx\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$可知,$(1+4k^2)x^2=4$, 所以$x^2=\frac{4}{1+4k^2}$,

设直线OA,OB,OP的方程分别为:$y=k_1x,y=k_2x,y=kx$, 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x,y)$.

则$x_1^2=\frac{4}{1+4k_1^2},x_2^2=\frac{4}{1+4k_2^2},x^2=\frac{4}{1+4k^2}$,

$S_{\triangle AOB}^2=\frac{1}{4}|x_1y_2-x_2y_1|^2=\frac{1}{4}x_1^2x_2^2(k_1-k_2)^2$

$=\frac{4(k_1-k_2)^2}{(1+4k_1^2)(1+4k_2^2)}=\frac{4(k_1^2+k_2^2-2k_1k_2)}{1+4(k_1^2+k_2^2)+16k_1^2k_2^2}=\frac{4\left(k_1^2+k_2^2+\frac{1}{2}\right)}{2+4(k_1^2+k_2^2)}=1$.

$\because k_1k_2=-\frac{1}{4}$,$\therefore k_2=-\frac{1}{4k_1}$,

则$S_{\triangle AOP}^2+S_{\triangle BOP}^2=\frac{4(k-k_1)^2}{(1+4k^2)(1+4k_1^2)}+\frac{4(k-k_2)^2}{(1+4k^2)(1+4k_2^2)}$

$=\dfrac{4(k-k_1)^2}{(1+4k^2)(1+4k_1^2)}+\dfrac{4\left(k+\frac{1}{4k_1}\right)^2}{(1+4k^2)\left(1+\frac{1}{4k_1^2}\right)}$

$=\dfrac{4(k-k_1)^2}{(1+4k^2)(1+4k_1^2)}+\dfrac{4\left(2kk_1+\frac{1}{2}\right)^2}{(1+4k^2)(1+4k_1^2)}=\dfrac{4k^2+4k_1^2+16k^2k_1^2+1}{(1+4k^2)(1+4k_1^2)}=1.$

所以 $S_{\Delta AOP}^2+S_{\Delta BOP}^2=S_{\Delta AOB}^2=1.$ ………………………………………………………………… 12 分

21. (1)设切点 $P(x_0,y_0)$，$f'(x)=3ax^2+1$，

则 $\begin{cases}y_0=ax_0^3+x_0\\y_0=2x_0-1\\3ax_0^2+1=2\end{cases}$，解得，$\begin{cases}x_0=\frac{3}{2}\\a=\frac{4}{27}\end{cases}$，所以 $a=\dfrac{4}{27}$. ……………………………………………………… 4 分

(2)不等式 $2x-6a\sin x<f(x)$ 可化为：$\sin x>\dfrac{1}{6a}x-\dfrac{1}{6}x^3$，设 $t=\dfrac{1}{6a}$，

令 $h(x)=\sin x-tx+\dfrac{1}{6}x^3$，则 $h'(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-t$，

令 $m(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-t$，则 $m'(x)=-\sin x+x$，

再令 $s(x)=-\sin x+x$，则 $s'(x)=-\cos x+1\geqslant 0$，

所以 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，又 $s(0)=0$，则 $s(x)>0$，即 $m'(x)>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$y=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2(x>0)$ 的值域为 $(1,+\infty)$.

① 当 $t\leqslant 1$ 时，即 $a\geqslant\dfrac{1}{6}$ 时，$m(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-t\geqslant 0\Leftrightarrow h'(x)\geqslant 0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，又 $h(0)=0$，所以 $h(x)>0$ 恒成立，符合.

② 当 $t>1$ 时，即 $0<a<\dfrac{1}{6}$ 时

$m(0)=1-t<0$，当 $x>2\sqrt{t+1}$ 时，$m(x)>0$，所以存在 $x_0>0$，使 $m(x_0)=0$，

则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$m(x)<0$，函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，而 $h(0)=0$，

所以 $h(x)<0$ 对 $x\in(0,x_0)$ 成立，不符合.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{6},+\infty\right)$. ……………………………………………………………… 8 分

(3) 由(2)可知，$x>0$ 时，$\sin x>x-\dfrac{1}{6}x^3$，则 $\dfrac{\sin x}{x}>1-\dfrac{1}{6}x^2$.

令 $x=\dfrac{1}{n}$，则 $n\sin\dfrac{1}{n}>1-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{n^2}>1-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{n(n-1)}=1+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}\right)$.

取 $n=2,3,4,\cdots$，则

$2\sin\dfrac{1}{2}+3\sin\dfrac{1}{3}+4\sin\dfrac{1}{4}+\cdots+n\sin\dfrac{1}{n}$

$>n-1+\dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{1}{2}-1\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}\right)\right]=n+\dfrac{1}{6n}-\dfrac{7}{6}$. …………… 12 分

22.(1) 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=3$，

所以 $\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=3$，即 $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=3$，

因为 t 为参数，将 $y=-2\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t$ 代入上式得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$，

所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}t\\y=-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）；………………………… 5 分

(2) 由 $\rho=4a\cos\theta(a>0)$，得 $\rho^2=4a\rho\cos\theta(a>0)$，

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $x^2+y^2=4ax(a>0)$

将直线 l 的参数方程与 C 的直角坐标方程联立，得 $t^2-2\sqrt{3}(1+a)t+12=0$，

由 $\Delta=[2\sqrt{3}(1+a)]^2-4\times 12=(1+a)^2-4>0$，解得 $a>1$，

设点 P 和点 Q 分别对应参数 t_1、t_2 为上述方程的根，

由韦达定理，$t_1+t_2=2\sqrt{3}(1+a)$，$t_1t_2=12$，

由题意得，$|PQ|^2=|t_1-t_2|^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=12(1+a)^2-48$，

$|MP|\cdot|MQ|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=12$，

因为 $|PQ|^2=|MP|\cdot|MQ|$，所以 $12(1+a)^2-48=12$，

解得 $a=\sqrt{5}-1$，或 $a=-1-\sqrt{5}$，因为 $a>0$，所以 $a=\sqrt{5}-1$. ………………………… 10 分