20230607 项目第一次模拟测试卷

理科数学 参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	B	D	B	B	C	B	A	D	A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

13．2　　14．$2x\pm y=0$　　15．2　　16．6 时

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤． 第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17．【解析】（1）因为 $a_na_{n+2}=ka_{n+1}{}^2\ (n\in\mathrm{N}^*)$，所以 $\begin{cases}a_1a_3=ka_2{}^2\\a_2a_4=ka_3{}^2\end{cases}$，…………… 2 分

因为 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_4=64$，所以 $\begin{cases}a_3=4k\\a_2a_4=16k^3\end{cases}$，

则 $k^3=8$，所以 $k=2$；…………………………………………………… 5 分

（2）因为 $k=2$，所以 $a_na_{n+2}=2a_{n+1}{}^2$，则 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，………………… 6 分

令 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，所以 $b_{n+1}=2b_n$，则 $\{b_n\}$ 是等比数列，

因为 $b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，$q=2$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2^n$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，…………… 9 分

则 $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\dfrac{a_2}{a_1}\times a_1$

$=2^{n-1}\times2^{n-2}\times\cdots\times2^2\times2^1\times1=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$．………………………………… 12 分

18．【解析】（1）连接 AC 交 BD 于点 F，连接 C_1F，

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AA_1\overset{\mathbin{/\!/}}{=}CC_1$，

所以四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，即 $AC\overset{\mathbin{/\!/}}{=}A_1C_1$，………………… 2 分

又因为底面 $ABCD$ 为棱形，所以点 F 为 AC 的中点，

点 E 为 B_1D_1 的中点，

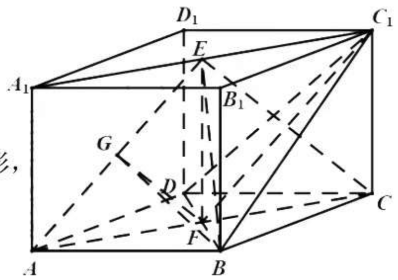
即点 E 为 A_1C_1 的中点，

所以 $C_1E\overset{\mathbin{/\!/}}{=}AF$，

即四边形 AFC_1E 为平行四边形，

所以 $AE\,/\!/\,C_1F$，

因为 $C_1F\subseteq$ 平面 BDC_1，



………… 4 分

所以 AE // 平面 BDC_1； ………………………………… 6 分

（2）方法一：取 AE 的中点 G ,连接 EF , BG , FG ,

在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp BD$，

又因为 $AC\perp BD$，所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C，则 $BD\perp AE$

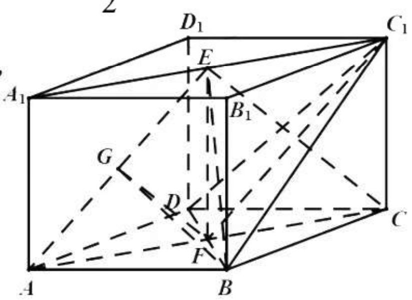
因为在 ΔABD 中，$AB=AD=BD=2$，且点 F 为 BD 的中点，所以 $AF=\sqrt{3}$，

又 $EF=AA_1=\sqrt{3}$，而点 G 为 AE 的中点，所以 $FG\perp AE$，

所以 $AE\perp$ 平面 BFG，即 $BG\perp AE$，

则 $\angle BGF$ 为二面角 $B-AE-C$ 的平面角， ……………………………9 分

在等腰直角三角形 AEF 中，$FG=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，又 $BF=\dfrac{1}{2}BD=1$，



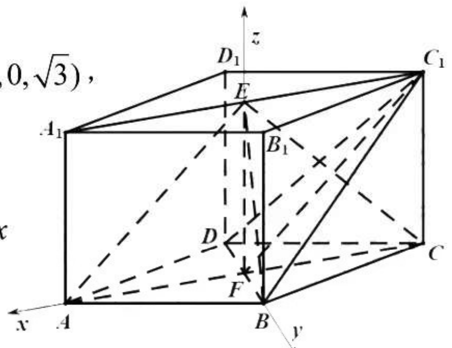
在直角三角形 BFG 中 $BG=\sqrt{BF^2+FG^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

所以 $\cos\angle BGF=\dfrac{FG}{BG}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

即二面角 $B-AE-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………………12 分

方法二：如图，以 FA，FB，FE 分别为分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

因为在 ΔABD 中，$AB=AD=BD=2$，且点 F 为 BD 的中点，



所以 $AF=\sqrt{3}$，$EF=AA_1=\sqrt{3}$，

则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$，

因为 $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,-1,\sqrt{3})$，

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为平面 BAE 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ -y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ z=x\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\vec{m}=(1,\sqrt{3},1)$，

平面 CAE 的法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{FB}=(0,1,0)$， ………………………… 10 分

设二面角 $B-A_1C_1-D$ 为 θ，

则 $\cos\theta=\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{1\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………… 12 分

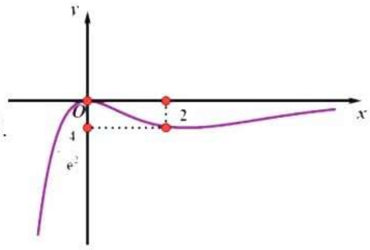
19. 【解析】（1）函数 $y=f(x)$ 有 3 个零点，即 $f(x)=0$ 有 3 个根，

也即 $b=-\dfrac{x^2}{e^x}$ 有 3 个根，即 $y=b$ 与 $g(x)=-\dfrac{x^2}{e^x}$ 的图象有三个交点； ……… 2 分

$g'(x)=\dfrac{x(x-2)}{e^x}$，故 $g'(x)<0$ 解得 $0<x<2$；

故 $g'(x)>0$ 解得 $x<0$ 或 $x>2$，

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增，在 $(0,2)$ 递减，在 $(2,+\infty)$ 递增.



又 $g(0)=0$，$g(2)=-\dfrac{4}{e^2}$，$x>0$, 时 $g(x)<0$；

即 $-\dfrac{4}{e^2}<b<0$； ………………………………………… 5 分

（2）即 $(x-a)^2+\dfrac{2}{e}\cdot e^x-3=0$ 有解.

设 $h(x)=(x-a)^2+2e^{x-1}-3$，则 $h'(x)=2(x-a)+2e^{x-1}$，

设 $m(x)=2(x-a)+2e^{x-1}$，则 $m'(x)=2+2e^{x-1}>0$ 恒成立，故 $m(x)$ 在 R 单调递增，

又 $m(-1)=2(-1-a+e^{-2})<0, m(a)=2e^{a-1}>0$，

且存在唯一的 x_0，使得 $m(x_0)=h'(x_0)=2(x_0-a)+2e^{x_0-1}=0$，

所以 $x_0-a=-e^{x_0-1}$， ………………………………………… 8 分

且 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$；$x<x_0$ 时，$h'(x)<0$.

即 $h(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，$x\to-\infty$ 时 $h(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时 $h(x)\to+\infty$，故要使得 $h(x)=0$ 有解，只需 $h(x)_{\min}\le 0$，

故 $h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0-a)^2+2e^{x_0-1}-3=e^{2(x_0-1)}+2e^{x_0-1}-3=(e^{x_0-1}+3)(e^{x_0-1}-1)\le 0$

故 $e^{x_0-1}\le 1$，解得 $x_0\le 1$， ………………………………………… 10 分

而 $a=x_0+e^{x_0-1}$ 在 $x_0\in(-\infty,1]$ 上单调递增，故 $a\le 1+1=2$，又因为 $a>0$，故 a 的取值范围为 $0<a\le 2$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】记第 i 轮宣传选中的同学是赞成 A 款式的事件为 A_i，

第 i 轮宣传选中的同学是赞成 B 款式的事件为 B_i，

（1）记第二轮选到的同学赞成 A 款式的概率为 $P(A_2)$，

因为 $P(A_1A_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$， ………………………… 2 分

$P(B_1A_2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{15}{50}=\dfrac{9}{50}$， ………………………… 4 分

则 $P(A_2)=P(A_1A_2)+P(B_1A_2)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{9}{50}=\dfrac{19}{50}$； ………………………… 5 分

（2）经过三轮宣传后赞成 A 款式的人数为 X 的所有可能取值为 $5,15,25,35$，

则 $P(X=5)=P(B_1B_2B_3)=\dfrac{30}{50}\times\dfrac{35}{50}\times\dfrac{40}{50}=\dfrac{42}{125}$，

$P(X=15)=P(A_1B_2B_3)+P(B_1A_2B_3)+P(B_1B_2A_3)$

$=\dfrac{20}{50}\times\dfrac{25}{50}\times\dfrac{30}{50}+\dfrac{30}{50}\times\dfrac{15}{50}\times\dfrac{30}{50}+\dfrac{30}{50}\times\dfrac{35}{50}\times\dfrac{10}{50}=\dfrac{39}{125}$，

$P(X=25)=P(B_1A_2A_3)+P(A_1B_2A_3)+P(A_1A_2B_3)$

$=\dfrac{30}{50}\times\dfrac{15}{50}\times\dfrac{20}{50}+\dfrac{20}{50}\times\dfrac{25}{50}\times\dfrac{20}{50}+\dfrac{20}{50}\times\dfrac{25}{50}\times\dfrac{20}{50}=\dfrac{29}{125}$

$P(X=35)=P(A_1A_2A_3)=\dfrac{20}{50}\times\dfrac{25}{50}\times\dfrac{30}{50}=\dfrac{3}{25}$ ………………………… 9分

所以分布列为

X	5	15	25	35
P	$\dfrac{42}{125}$	$\dfrac{39}{125}$	$\dfrac{29}{125}$	$\dfrac{3}{25}$

所以$EX=5\times\dfrac{42}{125}+15\times\dfrac{39}{125}+25\times\dfrac{29}{125}+35\times\dfrac{3}{25}=\dfrac{409}{25}$. ………………… 12分

21.【解析】（1）根据椭圆的对称性可知，

由于$A_2(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}),A_3(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$关于$y$轴对称，必同时在椭圆上， ………… 1分

若椭圆还经过点$A_1(0,1)$，则$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$，将点$A_2(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$代入，求得$a=2$，

可得椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$； ……………………………………… 3分

若椭圆还经过点$A(-4,0)$，可得$b^2=\dfrac{4}{5}<1$，不合题意，舍去.

则椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………… 5分

（2）方法一：设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$,

设直线PQ的方程为$x=my+t$，

由于直线PQ过点$(-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2})$，则有$3m+2t=-5$.

设直线AP的方程为$x=\dfrac{x_1+4}{y_1}y-4$

联立$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+4}{y_1}y-4\\x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow\left[(\dfrac{x_1+4}{y_1})^2+4\right]y^2-\dfrac{8(x_1+4)}{y_1}y+12=0$

所以 $y_1y_3=\dfrac{12}{(\dfrac{x_1+4}{y_1})^2+4}=\dfrac{12y_1^{\ 2}}{(x_1+4)^2+4y_1^{\ 2}}=\dfrac{12y_1^{\ 2}}{8x_1+20}=\dfrac{3y_1^{\ 2}}{2x_1+5}$，

同理 $y_2y_4=\dfrac{3y_2^{\ 2}}{2x_2+5}$，进一步可得 $y_3=\dfrac{3y_1}{2x_1+5}$，$y_4=\dfrac{3y_2}{2x_2+5}$. …………… 9 分

直线 MN 的斜率为 $\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\dfrac{\dfrac{3y_1}{2x_1+5}-\dfrac{3y_2}{2x_2+5}}{\dfrac{x_1+4}{y_1}y_3-\dfrac{x_2+4}{y_2}y_4}=\dfrac{\dfrac{3y_1}{2x_1+5}-\dfrac{3y_2}{2x_2+5}}{\dfrac{x_1+4}{y_1}\cdot\dfrac{3y_1}{2x_1+5}-\dfrac{x_2+4}{y_2}\cdot\dfrac{3y_2}{2x_2+5}}$

$$=\frac{y_1(2x_2+5)-y_2(2x_1+5)}{(x_1+4)(2x_2+5)-(x_2+4)(2x_1+5)}$$

$$=-\frac{1}{3}\times\frac{(2t+5)(y_1-y_2)}{m(y_1-y_2)}=1.$$ …………………… 12 分

方法二：因为 $A(-4,0),P(x_1,y_1),M(x_3,y_3)$ 三点共线，

则直线 PM 的方程为 $y=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x+4)$，

且将 $P(x_1,y_1)$ 代入直线，整理可得 $x_3y_1-x_1y_3=-4(y_1-y_3)\cdots\cdots(1)$ …… 6 分

由于 $P(x_1,y_1),M(x_3,y_3)$ 均在椭圆上，代入可得

$\begin{cases}\dfrac{x_1^{\ 2}}{4}+y_1^{\ 2}=1\\ \dfrac{x_3^{\ 2}}{4}+y_3^{\ 2}=1\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^{\ 2}y_3^{\ 2}}{4}+y_1^{\ 2}y_3^{\ 2}=y_3^{\ 2}\\ \dfrac{x_3^{\ 2}y_1^{\ 2}}{4}+y_1^{\ 2}y_3^{\ 2}=y_1^{\ 2}\end{cases}$

将两式相减可得 $\dfrac{(x_3y_1-x_1y_3)(x_3y_1+x_1y_3)}{4}=y_1^{\ 2}-y_3^{\ 2}$，

所以 $x_3y_1+x_1y_3=\dfrac{4(y_1^{\ 2}-y_3^{\ 2})}{x_3y_1-x_1y_3}=-(y_1+y_3)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ ………………… 8 分

则 $(1)+(2)$ 式可得：$2x_3y_1=3y_3-5y_1\Rightarrow y_1=\dfrac{3y_3}{2x_3+5}$

由 $(1)-(2)$ 式可得：

$$2x_1y_3=3y_1-5y_3=\frac{9y_3}{2x_3+5}-5y_3\Rightarrow 2x_1=\frac{9}{2x_3+5}-5\Rightarrow x_1=\frac{-5x_3-8}{2x_3+5}$$

直线 PB 的斜率为 $\dfrac{y_1-\dfrac{3}{2}}{x_1+\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\dfrac{3y_3}{2x_3+5}-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{-5x_3-8}{2x_3+5}+\dfrac{5}{2}}=\dfrac{2y_3-2x_3-5}{3}$，

同理直线 QB 的斜率为 $\dfrac{2y_4-2x_4-5}{3}$， ………………………………… 10 分

而 $k_{PA}=k_{QA}$，所以 $\dfrac{2y_3-2x_3-5}{3}=\dfrac{2y_4-2x_4-5}{3}$，则 $y_3-x_3=y_4-x_4$.

那么 $k_{MN}=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=1$. ………………………………… 12 分

方法三：设 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{QA}=\mu\overrightarrow{AN}$，

则 $\begin{cases} x_A=\dfrac{x_P+\lambda x_M}{1+\lambda}=-4 \\ y_A=\dfrac{y_P+\lambda y_M}{1+\lambda}=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_A=\dfrac{x_Q+\mu x_N}{1+\mu}=-4 \\ y_A=\dfrac{y_Q+\mu y_N}{1+\mu}=0 \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x_P+\lambda x_M=-4(1+\lambda) \\ y_P+\lambda y_M=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_Q+\mu x_N=-4(1+\mu) \\ y_Q+\mu y_N=0 \end{cases}$， …………………… 7 分

因为 P,M 均在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上，

所以 $\begin{cases} x_M^2+4y_M^2=4\cdots\cdots(1) \\ x_P^2+4y_P^2=4\cdots\cdots(2) \end{cases}$，

由 $(1)\cdot\lambda^2-(2)$ 得：$\lambda^2x_M^2-x_P^2=4(\lambda^2-1)$，

即 $(\lambda x_M-x_P)(\lambda x_M+x_P)=4(\lambda-1)(\lambda+1)$，

又因为 $x_P+\lambda x_M=-4(1+\lambda)$，所以 $\lambda x_M-x_P=1-\lambda$，所以 $\begin{cases} x_P=\dfrac{-5-3\lambda}{2} \\ x_M=\dfrac{-5\lambda-3}{2\lambda} \end{cases}$，

同理可得：$\begin{cases} x_Q=\dfrac{-5-3\mu}{2} \\ x_N=\dfrac{-5\mu-3}{2\mu} \end{cases}$， ………………………………… 9 分

因为 P,Q,B 三点共线，所以 $\dfrac{y_P-\frac{3}{2}}{x_P+\frac{5}{2}}=\dfrac{y_Q-\frac{3}{2}}{x_Q+\frac{5}{2}}$，

则 $y_Px_Q+\dfrac{5}{2}y_P-\dfrac{3}{2}x_Q=x_Py_Q+\dfrac{5}{2}y_Q-\dfrac{3}{2}x_P$，

所以 $\dfrac{-5-3\mu}{2}y_P+\dfrac{5}{2}y_P-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-5-3\mu}{2}=\dfrac{-5-3\lambda}{2}y_Q+\dfrac{5}{2}y_Q-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-5-3\lambda}{2}$，

所以 $-\mu y_P+\lambda y_Q=-\dfrac{3}{2}(\mu-\lambda)$，

所以 MN 的斜率 $k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-\frac{y_P}{\lambda}+\frac{y_Q}{\mu}}{\frac{3}{2}(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda})}=\frac{-\mu y_P+\lambda y_Q}{\frac{3}{2}(\lambda-\mu)}=\frac{-\frac{3}{2}(\mu-\lambda)}{\frac{3}{2}(\lambda-\mu)}=1$.

………………………………………………………… 12 分

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【解析】（1）当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\frac{1}{2}t\\ y=-3+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

消去参数 t 得 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-3=0$，

即直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-3=0$. ………………………………… 2 分

$\because \rho=4\cos\theta$，$\therefore \rho^2=4\rho\cos\theta$，$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，$\therefore x^2+y^2=4x$，

则曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x=0$. ………………………………… 5 分

（2）将直线 l 的参数方程代入到曲线 C 的直角坐标方程中得

$(-1+t\cos\alpha)^2+(-3+t\sin\alpha)^2=4(-1+t\cos\alpha)$，

化简得 $t^2-6(\sin\alpha+\cos\alpha)t+14=0$，

设 A，B 两点对应的参数为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=6(\sin\alpha+\cos\alpha)$，$t_1t_2=14$， ………………………………… 8 分

因为直线 l 过点 $P(-1,-3)$，

则 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{36(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-56}=\sqrt{36\sin2\alpha-20}=2$，

解得 $\sin2\alpha=\frac{2}{3}$. ………………………………… 10 分

23. 【解析】（1）因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=ab$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

又 $\because \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{2}}\geq\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$， ………………………………………… 3 分

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2=\frac{1}{2}$.

当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立. ………………………………………… 5 分

（2）因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=ab$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，$\therefore a>1$，$b>1$，

所以 $M=|2a-1|+|3b-1|\geq 2a+3b-2$， ………………………………… 7 分

$$=(2a+3b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-2=(2+3+\frac{3b}{a}+\frac{2a}{b})-2\geq 3+2\sqrt{6},$$

当且仅当$\frac{3b}{a}=\frac{2a}{b}$时等号成立，所以$M$最小值为$2\sqrt{6}+3$. …………… 10 分

关于我们