高二考试数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：人教B版选择性必修第三册占30%，必修第一册至必修第二册第四章占70%。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M=\{x|x^2+4x-5<0\}$，$N=\{x|-3<x<2\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x|-3<x<1\}$　　B. $\{x|-5<x<2\}$

C. $\{x|1<x<2\}$　　D. $\{x|-5<x<-3\}$

2. 已知 $0<a<1<b$，则下列不等式一定正确的是

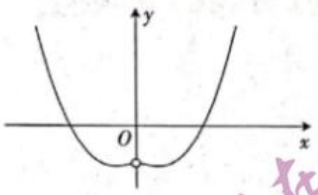
A. $b-a>1$　　B. $ab>1$

C. $\dfrac{b}{a}<1$　　D. $a+b>1$

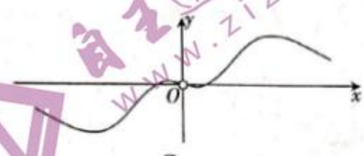
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1+a_3=10$，$a_5+a_7=26$，则 $S_7=$

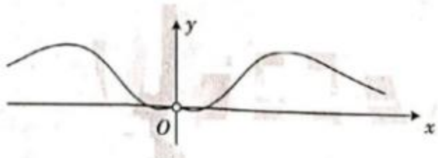
A. 63　　B. 45　　C. 49　　D. 56

4. 函数 $f(x)=\dfrac{x^3\cdot\ln|x|}{e^{|x|}}$ 的部分图象大致为


A


B


C


D

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+2x-3, x<2,\\ \dfrac{a}{x}, x\geqslant 2\end{cases}$ 在 **R** 上单调递增,则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,0)$　　B. $[-\frac{1}{2},0)$　　C. $(-\infty,-\frac{2}{7}]$　　D. $[-\frac{1}{2},-\frac{2}{7}]$

6. "$a\geqslant-\frac{1}{4}$"是"方程 $|x|+x^2=a$ 有实数解"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1\neq x_2$,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$,若 $f(1)=0$,则 $xf(x)\geqslant 0$ 的解集为

A. $[-1,1]$　　B. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$　　D. $(-\infty,-1]\cup[0,1]$

8. 已知过点 $A(0,b)$ 作的曲线 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的切线有且仅有两条,则 b 的取值范围为

A. $(0,\frac{1}{e})$　　B. $(0,\frac{2}{e})$　　C. $(0,e)$　　D. $(0,\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}})$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知 $x>y>0$,则

A. $x^{-1}>y^{-1}$　　B. $\sqrt{x}>\sqrt{y}$　　C. $2^x>2^y$　　D. $\ln x>\ln y$

10. 若函数 $f(x)=\ln x+ax^2+bx$ 既有极大值又有极小值,则

A. $a>0$　　B. $b>0$

C. $b^2-8a>0$　　D. $b^2=8a$

11. 设 $a=\log_2 e$, $b=\ln 3$,则

A. $ab=\ln\frac{3}{2}$　　B. $a+b<3$

C. $b-\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$　　D. $\frac{b}{a}<1$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, x>0,\\ \ln(-x+1)+3, x\leqslant 0,\end{cases}$ 函数 $g(x)=f(f(x))-m$,则下列结论正确的是

A. 若 $m=0$,则 $g(x)$ 有 2 个零点

B. 若 $m=3$,则 $g(x)$ 有 6 个零点

C. 若 $g(x)$ 有 5 个零点,则 m 的取值范围为 $(0,3)$

D. $g(x)$ 一定有零点

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 已知幂函数 $f(x)=(m^2-\frac{7}{2}m+\frac{5}{2})x^m$ 是奇函数,则 $m=$ ___▲___.

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,3)$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为___▲___.

15. 黄金比又称黄金律，是指事物各部分间一定的数学比例关系，即将整体一分为二，较大部分与较小部分之比等于整体与较大部分之比. 其中，较大部分与整体之比的比值称为黄金分割数，黄金分割数被公认为最具有审美意义的比例数字. 若数列 $\{a_n\}$ 是以黄金分割数为公比的等比数列，且 $a_{2024}+a_{2025}=2023$，则 $a_{2023}=$___▲___.

16. 已知函数 $y=-x+m$ 的图象与函数 $y=2^x+1$ 和函数 $y=2^{x-2}+1$ 的图象分别交于 A,B 两点，若 $|AB|=\sqrt{2}$，则 $m=$___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x+1$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $f(\ln t)=-3$，求 t 的值.

18.（12 分）

已知正实数 a,b 满足 $2a+b=ab$.

(1)求 $a+2b$ 的最小值；

(2)求 ab 的最小值.

19.（12 分）

已知大气压强 p(帕)随高度 h(米)的变化满足关系式 $\ln p_0-\ln p=kh$，p_0 是海平面大气压强.

(1)世界上有 14 座海拔 8000 米以上的高峰，喜马拉雅承包了 10 座，设在海拔 4000 米处的大气压强为 p'，求在海拔 8000 米处的大气压强(结果用 p_0 和 p' 表示).

(2)我国陆地地势可划分为三级阶梯，其平均海拔如下表：

	平均海拔(单位：米)
第一级阶梯	⩾4000
第二级阶梯	1000～2000
第三级阶梯	200～1000

若用平均海拔的范围直接代表海拔的范围，设在第二级阶梯某处的压强为 p_2，在第三级阶梯某处的压强为 p_3，$k=10^{-4}$，证明：$p_2\leqslant p_3\leqslant e^{0.18}p_2$.

20.(12分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{4}$，$a_na_{n+1}=2^{2n-5}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=(5-n)a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

21.(12分)

已知函数$f(x)=\log_a(a^x+1)-x(a>0$且$a\neq1)$.

(1)试讨论$f(x)$的值域；

(2)若关于x的方程$f(x)=\log_a(c\cdot a^x-c)$有唯一解，求$c$的取值范围.

22.(12分)

已知函数$f(x)$满足$x^2f'(x)+xf(x)=\mathrm{e}\ln x$，且$f(\mathrm{e})=1$，函数$g(x)=-x^2+2ax+4$.

(1)求$f(x)$的图象在$x=\mathrm{e}$处的切线方程；

(2)若对任意$x_1\in(1,\mathrm{e}]$，存在$x_2\in[1,2]$，使得$f(x_1)>g(x_2)$，求a的取值范围.

高二考试数学试卷参考答案

1. A　因为 $M=\{x|-5<x<1\}$，所以 $M\cap N=\{x|-3<x<1\}$.

2. D　因为 $0<a<1<b$，所以 $a+b>1$.

3. A　因为 $\begin{cases}a_1+a_3=10,\\a_5+a_7=26,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2a_1+2d=10,\\2a_1+10d=26,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=3,\\d=2,\end{cases}$ 故 $S_7=7a_1+\frac{7\times 6}{2}d=63$.

4. C　$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因为 $f(-x)=\frac{(-x)^3\cdot\ln|-x|}{e^{|-x|}}=-\frac{x^3\cdot\ln|x|}{e^{|x|}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，排除 A，D. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，排除 B，故选 C.

5. D　由题意可得 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\geqslant 2,\\a<0,\\4a+1\leqslant\frac{a}{2},\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant-\frac{2}{7}$.

6. B　因为 $|x|\geqslant 0$，所以 $a=|x|+x^2=(|x|+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\geqslant 0$. 故"$a\geqslant-\frac{1}{4}$"是"方程 $|x|+x^2=a$ 有实数解"的必要不充分条件.

7. A　对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数. 因为 $xf(x)\geqslant 0$，所以 $x=0$ 或 $\begin{cases}x>0,\\f(x)\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

8. D　设切点为 (x_0,y_0)，由题意得 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $k=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}=\frac{y_0-b}{x_0}=\frac{\frac{\ln x_0}{x_0}-b}{x_0}$，整理得 $b=\frac{2\ln x_0-1}{x_0}$，此方程有两个不等的实根. 令函数 $f(x)=\frac{2\ln x-1}{x}$，则 $f'(x)=\frac{3-2\ln x}{x^2}$. 当 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$f'(x)<0$，且 $f(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{3}{2}})$ 上单调递增，在 $[e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递减. $f(x)_{极大值}=f(e^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$. 故 $b\in(0,\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}})$.

9. BCD　当 $x=2,y=1$ 时，$\frac{1}{2}<1$，A 错误. 函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，B 正确. 函数 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，C 正确. 函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，D 正确.

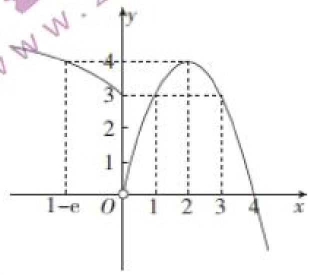
10. AC　$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2ax^2+bx+1}{x}$. 由题意可得方程 $2ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的正根 x_1,x_2，所以 $\begin{cases}\Delta=b^2-8a>0,\\x_1+x_2=-\frac{b}{2a}>0,\\x_1x_2=\frac{1}{2a}>0,\end{cases}$ 故 $a>0,b<0,b^2-8a>0$，A，C 正确.

11. BCD　$ab=\log_2 3$，A 错误. 因为 $a=\log_2 e<\log_2 2.8<\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，$b=\ln 3<\ln(2.25)^{\frac{3}{2}}<\ln e^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，所以 $a+b<3$，B 正确. $b-\frac{1}{a}=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$，C 正确. $\frac{b}{a}=\ln 3\times\ln 2<(\frac{\ln 3+\ln 2}{2})^2=(\frac{\ln 6}{2})^2<(\frac{\ln e^2}{2})^2=1$，D 正确.

12. ABD　令 $f(x)=4$，解得 $x=1-e$ 或 2；

令 $f(x)=3$，解得 $x=0$ 或 1 或 3.

根据函数图象的平移变换，可画出 $f(x)$ 的简图，如图所示.



令 $g(x)=0$，则 $f(f(x))=m$.

令 $f(x)=t$，则 $f(t)=m$.

当 $m>4$ 时，$f(t)=m$ 只有 1 解，且 $t<1-e$，此时 $f(x)=t$ 只有 1 解，所以 $g(x)$ 只有 1 个零点.

当 $m=4$ 时，$f(t)=4$ 有 2 解，即 $t=1-e$ 或 2.

$f(x)=1-e$ 有 1 解；$f(x)=2$ 有 2 解. 所以 $g(x)$ 有 3 个零点.

当 $m\in(3,4)$ 时，$f(t)=m$ 有 3 解 t_1,t_2,t_3，$t_1\in(1-e,0)$，$t_2\in(1,2)$，$t_3\in(2,3)$. 当 $t_1\in(1-e,0)$ 时，$f(x)=t_1$ 只有 1 解；当 $t_2\in(1,2)$ 时，$f(x)=t_2$ 有 2 解；当 $t_3\in(2,3)$ 时，$f(x)=t_3$ 有 2 解. 所以 $g(x)$ 有 5 个零点.

当 $m=3$ 时，$f(t)=3$ 有 3 解，即 $t=0$ 或 1 或 3. $f(x)=0$ 只有 1 解；$f(x)=1$ 有 2 解；$f(x)=3$ 有 3 解. 所以 $g(x)$ 有 6 个零点.

当 $m\in(0,3)$ 时，$f(t)=m$ 有 2 解 t_4,t_5，$t_4\in(0,1)$，$t_5\in(3,4)$. 当 $t_4\in(0,1)$ 时，$f(x)=t_4$ 有 2 解；当 $t_5\in(3,4)$ 时，$f(x)=t_5$ 有 3 解. 所以 $g(x)$ 有 5 个零点.

当 $m=0$ 时，$f(t)=0$ 只有 1 解 $t=4$，$f(x)=4$ 有 2 解，所以 $g(x)$ 有 2 个零点.

当 $m<0$ 时，$f(t)=m$ 只有 1 解，且 $t>4$，此时 $f(x)=t$ 只有 1 解，所以 $g(x)$ 只有 1 个零点.

综上，A，B，D 正确.

13. 3　由 $m^2-\frac{7}{2}m+\frac{5}{2}=1$，解得 $m=3$ 或 $\frac{1}{2}$（舍去）.

14. $(1,2)$　由题意可得 $\begin{cases}1<x+1<3,\\x-1>0,\end{cases}$ 解得 $1<x<2$.

15. 2023　由题意，设整体为 1，较大部分为 x，则较小部分为 $1-x$，则 $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$，即 $x^2+x-1=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ 舍去），故黄金分割数为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

令 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $q^2+q-1=0$，即 $a_n(q^2+q-1)=0$，所以 $a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=0$，故 $a_{2023}=a_{2024}+a_{2025}=2023$.

16. 4　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1<x_2$，$y_1>y_2$. 由 $|AB|=\sqrt{2}$ 可得 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=$

2. 又因为 AB 所在直线的斜率为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，所以 $x_2-x_1=y_1-y_2=1$，因为 $\begin{cases}y_1=2^{x_1}+1,\\y_2=2^{x_2-2}+1,\end{cases}$ 所以 $y_1-y_2=(2^{x_1}+1)-(2^{x_2-2}+1)=1$，即 $2^{x_1}-2^{x_1-1}=1$，解得 $x_1=1$. 因为 $y_1=2^{x_1}+1=3$，所以 $A(1,3)$，代入函数 $y=-x+m$，可得 $m=4$.

17. 解：(1)因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$. ………… 2分

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=e^{-x}+1=-f(x)$，则 $f(x)=-e^{-x}-1$. ………… 4分

故 $f(x)=\begin{cases}e^x+1,x>0,\\0,x=0,\\-e^{-x}-1,x<0.\end{cases}$ ………… 5分

(2)由(1)可得只有当 $x<0$ 时，$f(x)<0$. ………… 8分

因为 $f(\ln t)=-3$，所以 $-e^{-\ln t}-1=-3$，解得 $t=\frac{1}{2}$.

故 t 的值为 $\frac{1}{2}$. ………… 10分

18. 解：(1)因为 $2a+b=ab$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. ………… 2分

$a+2b=(a+2b)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})=1+4+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=9$， ………… 5分

当且仅当 $a=b=3$ 时，等号成立. ………… 6分

(2)因为 a,b 为正实数，所以 $ab>0$. ………… 8分

因为 $2a+b=ab\geqslant2\sqrt{2ab}$，所以 $(ab)^2-8ab\geqslant0$，解得 $ab\geqslant8$， ………… 11分

当且仅当 $a=2,b=4$ 时，等号成立. ………… 12分

19. (1)解：设在海拔 8000 米处的大气压强为 p''，

$\begin{cases}\ln p_0-\ln p'=4000k,\\\ln p_0-\ln p''=8000k,\end{cases}$ ………… 2分

所以 $2\ln\frac{p_0}{p'}=\ln\frac{p_0}{p''}$，解得 $p''=\frac{p'^2}{p_0}$. ………… 5分

(2)证明：设在第二级阶梯某处的海拔为 h_2，在第三级阶梯某处的海拔为 h_3，

则 $\begin{cases}\ln p_0-\ln p_2=10^{-4}h_2,\\\ln p_0-\ln p_3=10^{-4}h_3,\end{cases}$ ………… 6分

两式相减可得 $\ln\frac{p_3}{p_2}=10^{-4}(h_2-h_3)$. ………… 8分

因为 $h_2\in[1000,2000]$，$h_3\in[200,1000]$，所以 $h_2-h_3\in[0,1800]$， ………… 9分

则 $0\leqslant\ln\frac{p_3}{p_2}\leqslant10^{-4}\times1800=0.18$， ………… 10分

即 $1\leqslant\frac{p_3}{p_2}\leqslant e^{0.18}$， ………… 11分

故 $p_2 \leqslant p_3 \leqslant e^{0.18} p_2$. ………………………………………… 12分

20. 解:(1)因为 $a_n a_{n+1}=2^{2n-5}$,所以 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{2n-3}$,两式相比得 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=4$. ………… 1分

因为 $a_1=\frac{1}{4}$,$a_1a_2=2^{-3}$,所以 $a_2=\frac{1}{2}$. ………………………………… 2分

数列$\{a_{2n-1}\}$是以$\frac{1}{4}$为首项,4为公比的等比数列;

数列$\{a_{2n}\}$是以$\frac{1}{2}$为首项,4为公比的等比数列. ………………………… 3分

$a_{2n-1}=\frac{1}{4}\times 4^{n-1}=2^{(2n-1)-3}$,$a_{2n}=\frac{1}{2}\times 4^{n-1}=2^{2n-3}$. ………………… 4分

综上,$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-3}$. ………………………………………… 6分

(2)$b_n=(5-n)\times 2^{n-3}$.

$T_n=(5-1)\times 2^{1-3}+(5-2)\times 2^{2-3}+(5-3)\times 2^{3-3}+\cdots+(5-n)\times 2^{n-3}$,

$2T_n=(5-1)\times 2^{2-3}+(5-2)\times 2^{3-3}+(5-3)\times 2^{4-3}+\cdots+(5-n)\times 2^{n-2}$. …………… 8分

两式相减得 $-T_n=1-2^{-1}-2^0-\cdots-2^{n-3}-(5-n)\times 2^{n-2}$

$=1-\frac{2^{-1}(1-2^{n-1})}{1-2}-(5-n)\times 2^{n-2}=\frac{3}{2}+(n-6)\times 2^{n-2}$, ………………… 11分

所以 $T_n=-\frac{3}{2}-(n-6)\times 2^{n-2}$. ………………………………………… 12分

21. 解:(1)$f(x)=\log_a(a^x+1)-x=\log_a(a^x+1)-\log_a a^x=\log_a\frac{a^x+1}{a^x}=\log_a(1+\frac{1}{a^x})$. … 2分

因为 $1+\frac{1}{a^x}>1$,所以当 $a\in(0,1)$时,$\log_a(1+\frac{1}{a^x})\in(-\infty,0)$;

当 $a\in(1,+\infty)$时,$\log_a(1+\frac{1}{a^x})\in(0,+\infty)$.

故当 $a\in(0,1)$时,$f(x)$的值域为$(-\infty,0)$;当 $a\in(1,+\infty)$时,$f(x)$的值域为$(0,+\infty)$. …
……………………………………………………………………… 5分

(2)因为关于 x 的方程 $\log_a(1+\frac{1}{a^x})=\log_a(c\cdot a^x-c)$只有一个解,

所以$\begin{cases} c\cdot a^x-c=c\cdot(a^x-1)>0, \\ 1+\frac{1}{a^x}=c\cdot a^x-c \end{cases}$ 有唯一解. ………………………………… 6分

令 $t=a^x$,$t\in(0,+\infty)$,所以$\begin{cases} ct-c=c(t-1)>0, \\ 1+\frac{1}{t}=ct-c \end{cases}$ 有唯一解.

关于 t 的方程 $ct^2-(c+1)t-1=0$ 有唯一解,设 $g(t)=ct^2-(c+1)t-1$. ……………… 7分

当 $c=0$ 时,$-t-1=0$,解得 $t=-1$,不符合题意. ………………………………… 8分

当 $c>0$ 时,$t>1$,$g(1)=-2<0$,所以一定有一个解,符合题意. …………………… 10分

当 $c<0$ 时,$t\in(0,1)$,$\Delta=(c+1)^2+4c=0$,解得 $c=-3\pm 2\sqrt{2}$.

当 $c=-3-2\sqrt{2}$，$t=\sqrt{2}-1$ 时，符合题意，当 $c=-3+2\sqrt{2}$，$t=-1-\sqrt{2}$时，不符合题意.

综上，c 的取值范围为$\{-3-2\sqrt{2}\}\cup(0,+\infty)$. ………………………………… 12 分

22. 解：(1)令 $x=\mathrm{e}$，得 $\mathrm{e}^2f'(\mathrm{e})+\mathrm{e}f(\mathrm{e})=\mathrm{e}\ln \mathrm{e}$，即 $\mathrm{e}f'(\mathrm{e})+f(\mathrm{e})=1$. ………………… 2 分

因为 $f(\mathrm{e})=1$，所以 $f'(\mathrm{e})=0$. ………………………………………………… 3 分

故 $f(x)$的图象在 $x=\mathrm{e}$ 处的切线方程为 $y=1$. ………………………………… 4 分

(2)由题意可得，$f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$. ………………………………………… 6 分

由 $x^2f'(x)+xf(x)=\mathrm{e}\ln x$，得 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}\ln x-xf(x)}{x^2}$. ………………………… 7 分

令函数 $t(x)=\mathrm{e}\ln x-xf(x)$，

则 $t'(x)=\dfrac{\mathrm{e}}{x}-f(x)-xf'(x)=\dfrac{\mathrm{e}}{x}-f(x)-x\cdot\dfrac{\mathrm{e}\ln x-xf(x)}{x^2}=\dfrac{\mathrm{e}(1-\ln x)}{x}$. ……… 8 分

因为 $x_1\in(1,\mathrm{e}]$，所以 $1-\ln x\in[0,1)$，则 $t'(x)\geqslant 0$，$t(x)$在$(1,\mathrm{e}]$上单调递增.

$t(x)_{\max}=t(\mathrm{e})=\mathrm{e}\ln \mathrm{e}-\mathrm{e}f(\mathrm{e})=0$；即 $t(x)\leqslant 0$. ………………………………… 9 分

所以 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$在$(1,\mathrm{e}]$上单调递减，$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=1$. ……………………… 10 分

$g(x)$图象的对称轴方程是 $x=a$.

当 $a\leqslant\dfrac{3}{2}$时，$g(x)_{\min}=g(2)=4a<f(x)_{\min}=1$，解得 $a<\dfrac{1}{4}$.

当 $a>\dfrac{3}{2}$时，$g(x)_{\max}=g(1)=2a+3<f(x)_{\min}=1$，无解.

综上，a 的取值范围为$(-\infty,\dfrac{1}{4})$. ………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。