学校______ 班级______ 姓名______ 考号______ 座位号______

密 封 线 内 不 要 答 题

绝密★启用前

高三9月联考

数　学(理科)

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答。**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语、函数与导数、三角函数与解三角形(约70%)，其他内容(约30%)。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y\mid y=2^x,x\in A\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　C. $[-1,2)$　　D. $\{1,2\}$

2. 设 i 为虚数单位，若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2$，则 $||z|-\mathrm{i}|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是线段 AB，BC 上的点，且 $AD=3DB$，$BE=\frac{2}{3}BC$，若 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+y=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{6}$

4. 下列函数中，既是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上又是减函数的是

①$y=\cos 2\,022x$；②$y=|x+1|$；③$y=x^{-2}$；④$y=x-\frac{2}{x}$.

A. ①④　　B. ②③　　C. ③　　D. ②

5. 若 $\frac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{8}{3}$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=$

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

6. 已知 p：$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a\geqslant 0$，q：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+2ax_0+2-a=0$，若"p 且 q"是真命题，则实数 a 的取值范围是

A. $a\leqslant -2$　　B. $a\leqslant 1$

C. $a\leqslant -2$ 或 $a=1$　　D. $a>-2$ 且 $a\neq 1$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，"$\tan A\tan B=1$"是"$\sin^2A+\sin^2B=1$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 《孙子算经》是中国古代重要的数学著作，上面记载了一道有名的"孙子问题"，后来南宋数学家秦九韶在《算书九章·大衍求一术》中将此问题系统解决."大衍求一术"属现代数论中的一次同余式组问题，后传入西方，被称为"中国剩余定理".现有一道同余式组问题：将正整数中，被4除余1且被6除余3的数，按由小到大的顺序排成一列数 $\{a_n\}$，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{10}=$

A. 495　　B. 522

C. 630　　D. 730

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则关于 $f(x)$ 说法错误的是

A. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度后所得的函数为 $y=-\cos x$

B. $f(x)$ 的图象与 $g(x)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有3个零点，则实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{8\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right]$

10. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，点 P 为该椭圆上一点，且满足 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，若 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆的面积为 π，则该椭圆的方程为

A. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{18}=1$　　D. $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{24}=1$

11. 下列函数中，最大值是1的函数是

A. $y=|\sin x|+|\cos x|$　　B. $y=\cos^2x+4\sin x-4$

C. $y=\cos x\cdot\tan x$　　D. $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2}-\cos x}$

12. 已知函数 $f(x)=ae^x+4x$，对任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>x_1+x_2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A. $\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{2}{e^3},+\infty\right)$

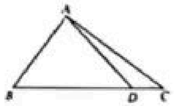
C. $\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{2}{e^3},+\infty\right)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若角 α 的终边在第四象限，且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\tan(\pi-\alpha)=$______

14. 已知曲线 $y=\ln x+2$ 的一条切线是 $y=kx+1$，则实数 $k=$______

15. 如图，在△ABC中，∠BAC=90°，AB=6，BC=10，点D是线段BC上的一点，且∠ADB=45°，则CD长为________



16. 对于定义域为D的函数$f(x)$，若存在$x_1,x_2\in D$且$x_1\neq x_2$，使得$f(x_1)=f(x_2)=f(x_1+x_2)-\frac{1}{2}$，则称函数$f(x)$具有性质M，若函数$f(x)=|\log_2 x-1|$，$x\in(0,\sqrt{a}]$具有性质M，则实数$a$的最小值为________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17.（本小题满分12分）

在△ABC中，a,b,c分别为内角A,B,C的对边，$c\sin\frac{A+C}{2}=b\sin C$.

(1)求角B的大小；

(2)若$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{2}{\tan B}$，$b=2$，求△ABC的面积.

18.（本小题满分12分）

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n=2a_n-1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

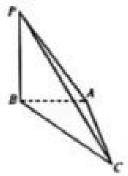
(2)已知数列$\{c_n\}$是等差数列，且$c_1=a_1$，$c_3=S_3$，设$b_n=a_n\cdot c_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

19.（本小题满分12分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AC\perp$平面PAB，$AC=2$，$AB=1$，$BP=\sqrt{3}$，$PA=2$.

(1)求证：$PB\perp BC$；

(2)求二面角$B-PC-A$的余弦值.



20.（本小题满分12分）

国庆节期间，某大型服装团购会举办了一次"你消费我促销"活动，顾客消费满300元(含300元)可抽奖一次，抽奖方案有两种(顾客只能选择其中的一种).

方案一：从装有5个形状、大小完全相同的小球(其中红球1个，黑球1个)的抽奖盒中，有放回地摸出3个球，每摸出1次红球，立减100元.

方案二：从装有10个形状、大小完全相同的小球(其中红球2个，白球1个，黑球7个)的抽奖盒中，不放回地摸出3个球，中奖规则为：若摸出2个红球，1个白球，享受免单优惠；若摸出2个红球和1个黑球则打5折；若摸出1个红球，1个白球和1个黑球，则打7.5折；其余情况不打折.

(1)某顾客恰好消费300元，选择抽奖方案一，求他实付金额的分布列和期望；

(2)若顾客消费500元，试从实付金额的期望值分析顾客选择何种抽奖方案更合理？

21.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2+(a+1)x$，$a\in\mathbf{R}$

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若$\forall x\in(0,+\infty)$，不等式$f(x)\leqslant xe^x+\frac{1}{2}ax^2-1$恒成立，求实数$a$的取值范围.

(二)选考题：共10分。请考生在第22、23两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分10分）选修4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），以$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2+8\rho^2\sin^2\theta-9=0$.

(1)求l的极坐标方程和C的直角坐标方程；

(2)若l与C交于A,B两点，求$|OA|+|OB|$的值.

23.（本小题满分10分）选修4-5：不等式选讲

已知函数$f(x)=|2x-4|+|x+1|$.

(1)求不等式$f(x)\geqslant 4$的解集；

(2)设$g(x)=f(x)-|x-2|$，若$g(x)$的最小值为m，实数a,b,c均为正数，且$a+b+c=m$，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的最小值.

高三9月联考·数学(理科)
参考答案、提示及评分细则

1. D　集合 $A=\{-1,0,1,2\}$,集合 $B=\left\{\frac{1}{2},1,2,4\right\}$,∴$A\cap B=\{1,2\}$. 故选 D.

2. C　由已知得 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$,所以 $|z|=\sqrt{2}$,所以 $||z|-i|=|\sqrt{2}-i|=\sqrt{3}$. 故选 C.

3. A　因为 $AD=3DB$,$BE=\frac{2}{3}BC$,所以 $\overrightarrow{DB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,所以 $x=-\frac{5}{12}$,$y=\frac{2}{3}$,所以 $x+y=-\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$. 故选 A.

4. C　$y=\cos 2\,022x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是单调函数,$y=|x+1|$ 的图象不关于 y 轴对称,不是偶函数,$y=x^{-2}$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,$y=x-\frac{2}{x}$ 是奇函数. 故选 C.

5. B　因为 $\frac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{8}{3}$,所以 $\frac{3\tan\alpha+2}{2\tan\alpha-1}=\frac{8}{3}$,解得 $\tan\alpha=2$,所以 $\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{3\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{3\pi}{4}}=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$. 故选 B.

6. C　若 p 真,则 $a\leqslant 1$;若 q 真,则 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 1$. 又因为"p 且 q"是真命题,所以 $a\leqslant -2$ 或 $a=1$. 故选 C.

7. A　若 $\tan A\tan B=1$,则 $\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=1$,即 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=0$,所以 $C=\frac{\pi}{2}$. 所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$,即 $A=\frac{\pi}{2}-B$,所以 $\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$,所以 $\sin^2 A=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos^2 B=1-\sin^2 B$,所以 $\sin^2 A+\sin^2 B=1$,所以"$\tan A\tan B=1$"是"$\sin^2 A+\sin^2 B=1$"的充分条件. 若 $\sin^2 A+\sin^2 B=1$,则 $\cos^2 A+\cos^2 B=1$,则 $\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A+\cos^2 A}+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 B+\cos^2 B}=1$,即 $\frac{1}{\tan^2 A+1}+\frac{1}{\tan^2 B+1}=1$,所以 $\tan^2 A\tan^2 B=1$,所以 $\tan A\tan B=1$ 或 $\tan A\tan B=-1$,所以"$\tan A\tan B=1$"不是"$\cos^2 A+\cos^2 B=1$"的必要条件,所以"$\tan A\tan B=1$"是"$\cos^2 A+\cos^2 B=1$"的充分不必要条件. 故选 A.

8. C　由题意可设 $a_n=4x+1=6y+3$,且 $x,y\in\mathbf{N}$,所以 $4(x+1)=6(y+1)$,令 $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}=k(k\in\mathbf{N})$,所以 $x=3k-1$,$y=2k-1$,所以 $a_k=12k-3$,则 $a_1=9$,$\{a_n\}$ 的公差 $d=12$,所以 $S_{10}=10\times 9+\frac{10\times 9}{2}\times 12=630$. 故选 C.

9. D　因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,对于 A,将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度后所得的函数为 $y=\sin\left(x-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ 的图象,所以选项 A 正确;对

于 B，因为 $f(-x)=\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\pi-\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=g(x)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象关于 y 轴对称，所以选项 B 正确；对于 C，由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 得 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$，所以选项 C 正确；对于 D，由 $3\pi\leqslant a+\frac{\pi}{3}<4\pi$，解得 $\frac{8\pi}{3}\leqslant a<\frac{11\pi}{3}$，所以选项 D 错误. 故选 D.

10. A　由 $e=\frac{1}{2}$，得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=2c$①. 设 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆的半径为 r. 因为 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆的面积为 π，所以 $\pi r^2=\pi$，解得 $r=1$（负舍），在 $\triangle F_1PF_2$ 中，根据椭圆的定义及焦点三角形的面积公式，知 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}=\frac{1}{2}r(2a+2c)$，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}b^2=a+c$　②，由 $a^2=b^2+c^2$③，联立①②③，得 $c=\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{3}$，$b=3$，所以该椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$. 故选 A.

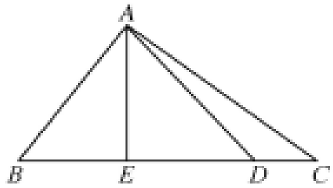
11. D　对于 A，$y=\sqrt{(|\sin x|+|\cos x|)^2}=\sqrt{1+|\sin 2x|}\leqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $\sin 2x=\pm1$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时取"$=$"，即当 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\max}=\sqrt{2}$，A 不正确；对于 B，$y=\cos^2x+4\sin x-4=1-\sin^2x+4\sin x-4=-(\sin x-2)^2+1$，当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=0$，故 B 错误；对于 C，$y=\cos x\cdot\tan x=\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x$，显然 $\sin x$ 最大值为 1，此时 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，而 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=\cos x\cdot\tan x$ 无意义，即 $\sin x$ 取不到 1，故 C 不正确；对于 D，令 $P(\cos x,-\sin x)$，$A(\sqrt{2},0)$，则 y 的值域即为直线 PA 的斜率的范围，显然点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，设直线 PA 的方程为 $y=k(x-\sqrt{2})$，即 $kx-y-\sqrt{2}k=0$，则圆心 $(0,0)$ 到 PA 的距离 $d=\frac{|-\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant1$，解得 $-1\leqslant k\leqslant1$. 故 $y_{\max}=1$，故 D 正确. 故选 D.

12. B　不妨设 $x_1>x_2$，由 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>x_1+x_2$，得 $f(x_1)-f(x_2)>x_1^2-x_2^2$，即 $f(x_1)-x_1^2>f(x_2)-x_2^2$，令 $g(x)=f(x)-x^2$，所以对任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_1>x_2$ 时，都有 $g(x_1)>g(x_2)$，即 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)=ae^x-2x+4\geqslant0$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\geqslant\frac{2x-4}{e^x}$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上恒成立. 令 $h(x)=\frac{2x-4}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{6-2x}{e^x}$，令 $h'(x)>0$，解得 $x<3$，令 $h'(x)<0$，解得 $x>3$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(3)=\frac{2}{e^3}$，所以 $a\geqslant\frac{2}{e^3}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{e^3},+\infty\right)$. 故选 B.

13. $\frac{3}{4}$　因为角 α 的终边在第四象限，且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan(\pi-\alpha)=\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

14. 1　设切点为$(x_0,\ln x_0+2)(x_0>0)$,又 $y'=\frac{1}{x}$,所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$,所以切线方程为 $y-(\ln x_0+2)=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,即 $y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0+1$,所以$\begin{cases}\frac{1}{x_0}=k,\\ \ln x_0+1=1,\end{cases}$　解得 $k=1$.

15. $\frac{8}{5}$　如图,过 A 作 BC 的垂线,垂足为 E. 在$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AB=6$,$BC=10$,所以 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=8$. 所以 $AE=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{24}{5}$. 在$\triangle ABE$ 中,$AE=\frac{24}{5}$,$AB=6$,$AE\perp BE$,所以 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\frac{18}{5}$. 在$\triangle AED$ 中,$AE=\frac{24}{5}$,$\angle ADB=45°$,$AE\perp BE$,所以 $DE=\frac{24}{5}$,所以 $CD=10-\frac{18}{5}-\frac{24}{5}=\frac{8}{5}$.



16. $8\sqrt{2}+8$　设 $x_1<x_2$,由 $f(x_1)=f(x_2)$得,$|\log_2 x_1-1|=|\log_2 x_2-1|$,则 $1-\log_2 x_1=\log_2 x_2-1$,故 $\log_2 x_1x_2=2$,∴$x_1x_2=4(x_1<2,x_2>2)$,又 $f(x_1+x_2)=|\log_2(x_1+x_2)-1|=\log_2(x_1+x_2)-1$,∴$\log_2(x_1+x_2)-1-\frac{1}{2}=\log_2 x_2-1$,即 $\log_2\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)=\frac{1}{2}$,$\frac{x_1}{x_2}=\sqrt{2}-1$,∵$x_1=\frac{4}{x_2}$,∴$\frac{4}{x_2^2}=\sqrt{2}-1$,$x_2^2=4\sqrt{2}+4$,∵$\sqrt{a}\geqslant x_1+x_2$,∴$a\geqslant(x_1+x_2)^2=\frac{16}{x_2^2}+8+x_2^2=8\sqrt{2}+8$,则实数 a 的最小值为 $8\sqrt{2}+8$.

17. 解:(1)由 $c\sin\frac{A+C}{2}=b\sin C$ 及正弦定理得 $\sin C\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin C$, ………………………… 1 分

因为 $B,C\in(0,\pi)$,则 $\sin C>0$ 且$\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin B=\sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{\pi-B}{2}=\cos\frac{B}{2}$, ………………………… 4 分

即 $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{B}{2}$,则 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$,可得$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 6 分

(2)$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A\sin C+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}$, ………………………… 8 分

$\frac{2}{\tan B}=\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{1}{\sin B}$,所以 $\sin A\sin C=\sin^2 B$,所以 $ac=b^2=4$, ………………………… 10 分

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

18. 解:(1)因为 $S_n=2a_n-1$,所以 $S_{n+1}=2a_{n+1}-1$,

两式相减,可得 $a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$,整理得 $a_{n+1}=2a_n$, ………………………… 2 分

因为在 $S_n=2a_n-1$ 中当 $n=1$ 时,$S_1=a_1=2a_1-1$,所以 $a_1=1$, ………………………… 4 分

所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项,2 为公比的等比数列,

所以 $a_n=2^{n-1}$. ………………………… 6 分

(2)易知 $c_1=a_1=1$,$c_3=S_2=3$,所以公差 $d=\frac{3-1}{2}=1$, ………………………… 7 分

所以 $c_n=n$,所以 $b_n=a_n\cdot c_n=n\cdot 2^{n-1}$, ………………………… 8 分

因为 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$,

则 $2T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$, ………………………… 10 分

两式相减可得 $T_n=n\cdot2^n-(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})=n\cdot2^n-\frac{1-2^n}{1-2}=(n-1)\cdot2^n+1$, …

即 $T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. ………………………………………… 12 分

19. (1)证明：∵$AC\perp$平面 PAB，$PB\subset$平面 PAB，∴$AC\perp PB$.

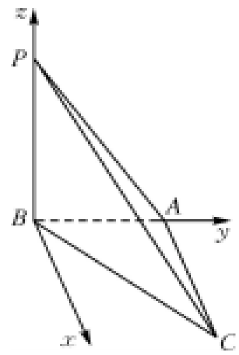
又 $AB=1$，$PB=\sqrt{3}$，$PA=2$，所以 $AB^2+PB^2=PA^2$，

∴$PB\perp AB$. ………………………………………… 2 分

∵$AB\cap AC=A$，AB，$AC\subset$平面 ABC，∴$PB\perp$平面 ABC，

又 $BC\subset$平面 ABC，∴$PB\perp BC$. ………………………………………… 4 分

(2)解：以点 B 为坐标原点，BA，BP 所在直线分别为 y，z 轴，以过点 B 平行于 AC 的直线为 x 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,1,0)$，$B(0,0,0)$，$C(2,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

则$\overrightarrow{BC}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{BP}=(0,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PA}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)$. ………… 5 分

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2x_1+y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，解得 $y_1=-2$，$z_1=0$，所以平面 PBC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-2,0)$. ………………………………………… 7 分

设平面 PAC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=y_2-\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2x_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$，解得 $x_2=0$，$y_2=\sqrt{3}$，故平面 PAC 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},1)$.

………………………………………… 9 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 11 分

由图易知二面角 $B-PC-A$ 为锐角，

∴二面角 $B-PC-A$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)设实付金额为 X 元，X 可能的取值为 0，100，200，300，………………………… 1 分

则 $P(X=0)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=\dfrac{1}{125}$，$P(X=100)=C_3^2\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{12}{125}$，

$P(X=200)=C_3^1\left(\dfrac{1}{5}\right)\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{48}{125}$，$P(X=300)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{125}$，………………………… 3 分

故 X 的分布列为

X	0	100	200	300
P	$\dfrac{1}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{64}{125}$

………………………………………… 4 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{125}+100\times\dfrac{12}{125}+200\times\dfrac{48}{125}+300\times\dfrac{64}{125}=240$(元). ………………………… 6 分

(2)若选择方案一，设摸到红球的个数为 Y，实付金额为 φ，则 $\varphi=500-100Y$，

由题意可得 $Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{5}\right)$，故 $E(Y)=3\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$，

所以 $E(\varphi)=E(500-100Y)=500-100E(Y)=500-60=440$(元)； ………………………… 8 分

若选择方案二，设实付金额为 η 元，η 可能的取值为 0，250，375，500，

则 $P(\eta=0)=\frac{C_2^2C_1^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$，$P(\eta=250)=\frac{C_2^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{120}$，

$P(\eta=375)=\frac{C_2^1C_1^1C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{60}$，$P(\eta=500)=1-\frac{1}{120}-\frac{7}{120}-\frac{7}{60}=\frac{49}{60}$，

故 η 的分布列为

η	0	250	375	500
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{49}{60}$

所以 $E(\eta)=0\times\frac{1}{120}+250\times\frac{7}{120}+375\times\frac{7}{60}+500\times\frac{49}{60}\approx466.67$(元)．…………………………… 11 分

因为 $E(\varphi)<E(\eta)$，

故从实付金额的期望值分析顾客选择方案一更合理．…………………………………………………… 12 分

21．解：(1)函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2+(a+1)x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+ax+a+1=\frac{ax^2+(a+1)x+1}{x}=\frac{(ax+1)(x+1)}{x}$．………………………………… 1 分

当 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；……………………………………………… 2 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)<0$ 得 $x>-\frac{1}{a}$，令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<-\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增．………………………………… 3 分

综上，当 $a\geqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增．……………………………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $f(x)\leqslant xe^x+\frac{1}{2}ax^2-1$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $a\leqslant e^x-\frac{\ln x+1}{x}-1$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立．…………………………………………………… 5 分

设 $g(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}-1$，其中 $x>0$，

所以 $a\leqslant g(x)_{\min}$，$g'(x)=e^x+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

设 $h(x)=x^2e^x+\ln x$，其中 $x>0$，则 $h'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}>0$，

所以，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．…………………………………………………………………… 6 分

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{4}-\ln 2<0$，$h(1)=e>0$，

所以，存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $h(x_0)=x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减，当 $x>x_0$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}-1$．…………………………………………………………………… 8 分

因为 $h(x_0)=x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，则 $x_0e^{x_0}=-\frac{1}{x_0}\ln x_0=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=e^{\ln\frac{1}{x_0}}\ln\frac{1}{x_0}$，

设 $\varphi(x)=xe^x$，其中 $x>0$，则 $\varphi'(x)=(x+1)e^x>0$，

所以函数 $\varphi(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，…………………………………… 10 分

因为 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，则 $1<\frac{1}{x_0}<2$，则 $\ln\frac{1}{x_0}>0$，

由 $x_0e^{x_0}=e^{\ln\frac{1}{x_0}}\ln\frac{1}{x_0}$ 可得 $\varphi(x_0)=\varphi\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$，所以 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}=-\ln x_0$，…………………… 11 分

所以 $x_0+\ln x_0=\ln(x_0e^{x_0})=0$，可得 $x_0e^{x_0}=1$，

所以 $g(x)_{\min}=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}-1=\frac{1-(-x_0)-1}{x_0}-1=0$，所以 $a\leqslant 0$.

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$. …………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)消去直线 l 参数方程中的参数 t 得 $x=\sqrt{3}y$，显然直线 l 过原点，倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，直线 l 的极坐标方程为

$\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………………………………………………… 2 分

曲线 C 的极坐标方程化为 $\rho^2\cos^2\theta+9\rho^2\sin^2\theta=9$，将 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y\end{cases}$ 代入得：$x^2+9y^2=9$，即 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，

……………………………………………………………………………………………… 4 分

所以 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$，$C$ 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ………………… 5 分

(2)把 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$ 代入 $\rho^2+8\rho^2\sin^2\theta-9=0$ 得 $\rho^2=3$，解得 $\rho=\pm\sqrt{3}$，……………… 7 分

所以 $|OA|=|OB|=\sqrt{3}$，

所以 $|OA|+|OB|=2\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)\geqslant 4$，即 $|2x-4|+|x+1|\geqslant 4$.

当 $x\geqslant 2$ 时，$2x-4+x+1\geqslant 4$，解得 $x\geqslant\frac{7}{3}$；…………………………………………… 1 分

当 $-1<x<2$ 时，$4-2x+x+1\geqslant 4$，解得 $x\leqslant 1$，又 $-1<x<2$，所以 $-1<x\leqslant 1$；………… 3 分

当 $x\leqslant -1$ 时，$4-2x-x-1\geqslant 4$，解得 $x\leqslant -\frac{1}{3}$，又 $x\leqslant -1$，所以 $x\leqslant -1$. ……………… 4 分

综上，不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集为 $(-\infty,1]\cup\left[\frac{7}{3},+\infty\right)$. ………………………………… 5 分

(2) $g(x)=|2x-4|+|x+1|-|x-2|=|x-2|+|x+1|\geqslant|(x-2)-(x+1)|=3$，……………… 7 分

当且仅当 $(x-2)(x+1)\leqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时取等号，所以 $g(x)_{\min}=3$，即 $m=3$. ………… 8 分

所以 $a+b+c=3$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{3}\left(3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geqslant$

$\frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}\right)=3$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时，等号成立，

即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值为 3. ……………………………………………………… 10 分