2023年春期高中二年级期终质量评估

数学参考答案

一. 选择题. 1-8. BCAD CCCA

二. 选择题. 9.AD 10.ABD 11.BD 12.AC

三. 填空题. 13. $\dfrac{1}{17}$ 14. $y=3x-1$

15. $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 16. 22（本空2分）$a_n=\dfrac{4^n+2}{3}$（本空3分）

提示16.由题知，若 n 为奇数，则 $f(n)=n$；若 n 为偶数，则 $f(n)=f(\dfrac{n}{2})$. 故

$$a_1=2,\ a_n=f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(2^n-1)+f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(2^n)$$

$$=1+3+5+\cdots+(2^n-1)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2^{n-1})$$

$$=\frac{2^{n-1}\cdot 2^n}{2}+a_{n-1},\therefore a_n-a_{n-1}=4^{n-1}$$

$\therefore n\ge 2$时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+4+2=\dfrac{4(1-4^{n-1})}{1-4}+2=\dfrac{4^n+2}{3}$，又 $a_1=2$ 符合上式 $\therefore a_n=\dfrac{4^n+2}{3}$

四. 解答题:

17. 解：（1）由题知 $\bar{x}=\dfrac{1}{5}(3+4+5+6+7)=5,$ ....1 分

$\bar{y}=\dfrac{1}{5}(1+1.1+1.5+1.9+2.2)=1.54,$ ....2 分

$\therefore \hat{b}=\dfrac{41.7-5\times5\times1.54}{135-5\times5^2}=0.32,$ ....5 分

$\hat{a}=1.54-0.32\times5=-0.06$ ....6 分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $y=0.32x-0.06$ ....7 分

（2）由（1）知，当 $x=10$ 时，$y=0.32\times10-0.06=3.14$

所以预测该月用户为3.14万人. ....10 分

18. 解：（1）由题得

成绩	低于 110 分	不低于 110 分	合计
感兴趣	9	16	25
不感兴趣	21	4	25
合计	30	20	50

................2 分

$$\chi^2=\frac{50(4\times9-16\times21)^2}{25\times25\times30\times20}=12>10.828$$ ....4 分

所以有 99.9%的把握认为“该校高二年级学生对数学的感兴趣程度与成绩不低于 110 分有关”. ....5 分

（2）由题意知，X 的可能取值为 0,1,2,3.

$$P(X=0)=\frac{C_3^0C_5^4}{C_8^4}=\frac{1}{14},\ P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^3}{C_8^4}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7},\ P(X=3)=\frac{C_3^3C_5^1}{C_8^4}=\frac{1}{14}.$$ ....9 分

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

故期望 $E(X)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{1}{14}=\frac{3}{2}$ ....12 分

19. 解：（1） $n=1$ 时， $S_1=2a_1-1=a_1$，$\therefore a_1=1$ .....2 分

$n\ge2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$， $\therefore\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$ .....4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列

故 $a_n=2^{n-1}$， $n\in N^*$ .....6 分

(2) 由（1）得 $b_n=(n-1)\bullet2^{n-1}$ .....7 分

$\therefore T_n=0\bullet2^0+1\bullet2^1+2\bullet2^2+\cdots+(n-1)\bullet2^{n-1}$

$2T_n=0\bullet2^1+1\bullet2^2+\cdots+(n-2)\bullet2^{n-1}+(n-1)\bullet2^n$ .....9 分

$$\therefore -T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-(n-1)2^n=\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(n-1)2^n=-(n-2)2^n-2$$

.....11 分

$\therefore T_n=(n-2)2^n+2, n\in N^*$ .....12 分

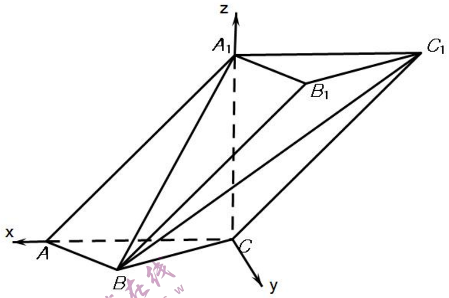
20. 解：（1）证明：$\because\angle A_1AC=45^\circ, AA_1=2\sqrt{2}, AC=2, \therefore A_1C=2, A_1C\perp AC$ .....2 分

又因为平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，交线为 AC， $A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，

$\therefore A_1C\perp$ 平面 ABC， .....4 分

$A_1C\subset$ 平面 A_1BC，∴平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABC .....5 分

（2）以 C 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图所示



则 $A_1(0,0,2),B(1,\sqrt{3},0),C_1(-2,0,2),B_1(-1,\sqrt{3},2)$ .....7 分

$\therefore \overrightarrow{BC_1}=(-3,-\sqrt{3},2),\overrightarrow{BA_1}=(-1,-\sqrt{3},2),\overrightarrow{BB_1}=(-2,0,2)$

设平面 A_1BC_1 的法向量 $\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3x_1-\sqrt{3}y_1+2z_1=0,\\ -x_1-\sqrt{3}y_1+2z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=2$，则 $\overrightarrow{m}=(0,2,\sqrt{3})$ .....9 分

设平面 BB_1C_1 的法向量 $\overrightarrow{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\bullet\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \overrightarrow{n}\bullet\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3x_2-\sqrt{3}y_2+2z_2=0,\\ -2x_2+2z_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=-1$，则 $\overrightarrow{n}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$ .....11 分

$\therefore \cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\dfrac{\overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{1}{7}$

二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{7}$ ......12 分

21.解：（1）设直线 l 的方程为：$x=my+n,$

代入 $y^2=x$ 得 $y^2-my-n=0$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=m,y_1y_2=-n$ .....3 分

由 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(y_1y_2)^2+y_1y_2=n^2-n=6$

$\therefore n=-2$（舍去）或 $n=3$

故点 M 的坐标为（3，0）. .....5 分

(2) 由（1）知 $y_1y_2=-3$，不妨设 $y_1>0$，$y_2=-\dfrac{3}{y_1}$ .....6 分

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}|OM||y_1-y_2|=\dfrac{3}{2}(y_1-y_2)=\dfrac{3}{2}(y_1+\dfrac{3}{y_1})$ .....8 分

$S_{\Delta OBC}=S_{\Delta OBF}=\dfrac{1}{2}|OF||y_2|=\dfrac{3}{8y_1}$ .....10 分

$\therefore S_{四边形OABC}=S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}=\dfrac{3}{2}y_1+\dfrac{39}{8y_1}=\dfrac{3}{8}(4y_1+\dfrac{13}{y_1})\geq\dfrac{3}{8}\times 2\sqrt{4y_1\bullet\dfrac{13}{y_1}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$

当且仅当$4y_1=\frac{13}{y_1}$，即$y_1=\frac{\sqrt{13}}{2}$时等号成立

故四边形$OABC$面积的最小值为$\frac{3\sqrt{13}}{2}$.　　　　　　　　　.....12 分

22. 解：（1）函数$f(x)=\ln x-kx^2(k\in R)$有两个零点化为$k=\frac{\ln x}{x^2}$有两个正根，

设$g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，$g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，　　　　　　.....2 分

由$g'(x)>0$得$x\in(0,\sqrt{e})$，由$g'(x)<0$得$x\in(\sqrt{e},+\infty)$

$\therefore g(x)$在$(0,\sqrt{e})$单增，在$(\sqrt{e},+\infty)$单减　　　　　　.....4 分

又$g(1)=0,\ g(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$, 当$x>1$时$g(x)>0$

故实数k的取值范围为$(0,\frac{1}{2e})$　　　　　　.....6 分

（2）由（1）知$1<x_1<\sqrt{e}<x_2$

由题得$\begin{cases}\ln x_1=kx_1^2\\ \ln x_2=kx_2^2\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\ln x_2+\ln x_1=k(x_2^2+x_1^2)\\ \ln x_2-\ln x_1=k(x_2^2-x_1^2)\end{cases}$　　　　.....8 分

$\therefore \ln x_1+\ln x_2=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_2^2-x_1^2}\ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{(\frac{x_2}{x_1})^2+1}{(\frac{x_2}{x_1})^2-1}\ln\frac{x_2}{x_1}$，设$\frac{x_2}{x_1}=t\in(1,+\infty)$

由题知，需证明$\frac{t^2+1}{t^2-1}\ln t>1$, 对$t\in(1,+\infty)$恒成立

即$\ln t-\frac{t^2-1}{t^2+1}>0$, 对$t\in(1,+\infty)$恒成立，　　　　　　.....10 分

记$\varphi(t)=\ln t-\frac{t^2-1}{t^2+1}$，$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4t}{(t^2+1)^2}=\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2t}>0$

$\therefore \varphi(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增且$\varphi(1)=0$，故$\varphi(t)>0$对$t\in(1,+\infty)$恒成立

综上所述，$\ln x_1+\ln x_2>1$成立.　　　　　　.....12 分