# 超级全能生 2023 高考全国卷地区高三年级 5 月联考·数学(理科)

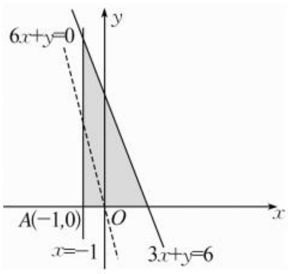
## 参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $A=\{x|x^2-x-6=0\}=\{-2,3\}$，所以 $\complement_U A=\{-1,0,1\}$，故选 C.

2. B　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，由 $2z-3\bar{z}=1-5i$ 得 $-a+5bi=1-5i$，所以 $a=-1,b=-1$，所以 $z=-1-i$，则 $|z|=\sqrt{2}$，故选 B.

3. A　当 $a=-3,b=-2$ 时满足 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$，但不满足 $\log_{2023}a>\log_{2023}b$，不满足充分性；由 $\log_{2023}a>\log_{2023}b$ 及对数函数 $y=\log_{2023}x$ 的单调性可知，$a>b>0$，又 $\frac{1}{ab}>0$，所以 $a\times\frac{1}{ab}>b\times\frac{1}{ab}>0$，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，所以 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$，满足必要性，故选 A.

4. C　画出可行域如图中阴影部分，作出直线 $6x+y=0$ 并平移，当平移后的直线经过点 $A(-1,0)$ 时，$z$ 取得最小值. 所以 $z=6x+y$ 的最小值为 $z_{\min}=6\times(-1)+0=-6$，故选 C.




5. A　因为 $f(-x)=\frac{4^{-x}-1}{4^{-x}+1}\cdot\cos(-4x)=-\frac{4^x-1}{4^x+1}\cdot\cos 4x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 BD；当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(\frac{\pi}{4})=\frac{4^{\frac{\pi}{4}}-1}{4^{\frac{\pi}{4}}+1}\cdot\cos\pi=-\frac{4^{\frac{\pi}{4}}-1}{4^{\frac{\pi}{4}}+1}<0$，排除答案 C，故选 A.

6. C　初始值 $k=1,S=1$，第一次循环 $S=1+\log_2 2,k=2$；

第二次循环 $S=1+\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}=1+\log_2 3,k=3$；

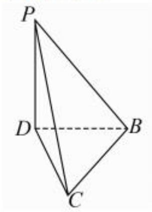
第三次循环 $S=1+\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}=1+\log_2 4,k=4$；

…,

第 $n$ 次循环 $S=1+\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\log_2\frac{5}{4}+\cdots+\log_2\frac{n+1}{n}=1+\log_2(n+1),k=n+1$,

由 $1+\log_2(n+1)=5$，得 $n=15$，此时 $k=15$，退出循环，所以判断框中填“$k<15$?”. 故选 C.

7. C　当平面 $PBD$ 与平面 $BCD$ 垂直时，由 $BC\perp BD$ 可得 $BC\perp$ 平面 $PBD$，此时 $BC\perp PB$，①正确；当 $\angle ABD>45°$ 时，在翻折过程中，$\angle PBA$ 可以取从 $0°$ 到 $2\angle ABD>90°$ 的范围，而 $AB/\!/CD$，即直线 $PB$ 与直线 $CD$ 所成角为 $\angle PBA$，所以存在点 $P$，使得 $PB\perp CD$，②正确；由 $BC\perp BD$ 可得 $AD\perp DB$，所以 $\angle ABD$ 为锐角，$\angle PBD$ 为锐角，所以③错误，故选 C.




8. D　因为相应于点 $(1.2,44)$ 的残差为 1，所以点 $(1.2,43)$ 在回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+13$ 上，则 $1.2\hat{b}+13=43$，解得 $\hat{b}=25$，则 $\hat{y}=25x+13$，$\bar{x}=\frac{1}{4}\times(0.3+0.5+0.8+1.2)=0.7$，$\bar{y}=\frac{1}{4}\times(20+m+n+44)=\frac{64+m+n}{4}$，代入 $\hat{y}=25x+13$ 得 $\frac{64+m+n}{4}=25\times0.7+13$，解得 $m+n=58$，故选 D.

9. A　由题意可知，双曲线 $C$ 的渐近线方程为 $ax\pm by=0$，圆 $x^2+y^2-4ax+2a^2=0$ 化为 $(x-2a)^2+y^2=2a^2$，圆心为 $(2a,0)$，半径为 $\sqrt{2}a$，由题意可知，$\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}a$，所以 $\frac{2a}{c}=\sqrt{2}$，

则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,故选 A.

10. B　由圆锥的外接球的表面积为 $36\pi$ 可知球的半径为 3,
设圆锥的底面半径为 $r$,球心 $O$ 到圆锥底面的距离为 $d$,则 $r^2=9-d^2(0\leqslant d<3)$,
当圆锥的高为 $3+d$ 时,圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2(3+d)=\frac{\pi}{3}(9-d^2)(3+d)(0\leqslant d<3)$,
则 $V'=\pi(1-d)(3+d)$,
当 $0\leqslant d<1$ 时,$V'>0$,$V$ 单调递增,当 $1<d<3$ 时,$V'<0$,$V$ 单调递减,
所以当 $d=1$ 时,$V$ 的最大值为 $\frac{32\pi}{3}$.
当圆锥的高为 $3-d$ 时,圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2(3-d)=\frac{\pi}{3}(9-d^2)(3-d)(0\leqslant d<3)$,
则 $V'=\pi(1+d)(d-3)<0$,$V$ 在 $[0,3)$ 上单调递减,
所以当 $d=0$ 时,$V$ 的最大值为 $9\pi$,比较可知,$V$ 的最大值为 $\frac{32\pi}{3}$,故选 B.

11. D　由题意可知,$\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{3}$,则 $T\geqslant\frac{2\pi}{3}$,
因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}\leqslant 3$,所以 $\omega=1,2,3$.
因为 $f(-\frac{\pi}{2})+f(\frac{\pi}{6})=0$,所以函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心为 $(-\frac{\pi}{6},0)$,
所以 $-\frac{\omega\pi}{6}+\varphi=k_1\pi,k_1\in\mathbf{Z}$. ①
又 $f(\frac{\pi}{4})=1$,所以 $\frac{\omega\pi}{4}+\varphi=2k_2\pi+\frac{\pi}{6},k_2\in\mathbf{Z}$,②或 $\frac{\omega\pi}{4}+\varphi=2k_3\pi+\frac{5\pi}{6},k_3\in\mathbf{Z}$,③
由①②得,$\frac{5}{12}\pi\omega=(2k_2-k_1)\pi+\frac{\pi}{6}$,所以 $\omega=\frac{12}{5}(2k_2-k_1)+\frac{2}{5}$,不存在 $k_1,k_2$,使得 $\omega=1,2,3$.
由①③得,$\omega=\frac{12}{5}(2k_3-k_1)+2$,不存在 $k_1,k_3$,使得 $\omega=1,3$,当 $k_1=2k_3$ 时,$\omega=2$,
此时 $\varphi=2k_3\pi+\frac{\pi}{3},k_3\in\mathbf{Z}$,由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $\omega\varphi=\frac{2\pi}{3}$,故选 D.

12. B　令 $t=\frac{1}{2}$,则 $a=t-\frac{1}{2}t^2,b=\ln(1+t),c=e^t-1$,
令 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x)(x>-1)$,则 $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}\leqslant 0$,
所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(0.5)<f(0)=0$,则 $a<b$;
令 $g(x)=\ln(1+x)-e^x+1(x\geqslant 0)$,所以 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-e^x\leqslant 0$,
所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(0.5)<g(0)=0$,则 $b<c$,所以 $a<b<c$,故选 B.

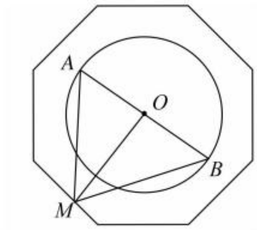
13. $\frac{2}{3}$　由题意可知,甲、乙两名志愿者参加 3 个展区的服务工作有 $3\times3=9$ 种方法,其中甲、乙被安排在不同展区有 $3\times2=6$ 种方法,故甲、乙被安排在不同展区的概率为 $P=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

14. $\frac{4}{3}$　设 $|BF_1|=m(m>0)$,则 $|AB|=4m$,所以 $|AF_1|=3m$,
由椭圆的定义可知,$|BF_2|=2a-|BF_1|=2a-m$,$|AF_2|=2a-|AF_1|=2a-3m$,
由 $|BF_2|=\frac{5}{3}|AF_2|$ 得 $2a-m=\frac{5}{3}(2a-3m)$,解得 $m=\frac{1}{3}a$,

所以$|AB|=\frac{4}{3}a$，$|AF_2|=2a-a=a$，$|BF_2|=2a-\frac{1}{3}a=\frac{5}{3}a$，

显然$|BF_2|^2=|AB|^2+|AF_2|^2$，所以$AB\perp AF_2$，所以$\tan\angle AF_2B=\frac{|AB|}{|AF_2|}=\frac{4}{3}$.

15. $\frac{11+18\sqrt{2}}{4}$　如图，连接$OM$.




因为$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})$

$=|\overrightarrow{MO}|^2+\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{MO}|^2+\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-4=|\overrightarrow{MO}|^2-4$.

根据图形可知，当点$M$位于正八边形各边的中点时，$|MO|^2$有最小值为$\frac{27+18\sqrt{2}}{4}$，此时$|\overrightarrow{MO}|^2-4=\frac{11+18\sqrt{2}}{4}$.

16. $\frac{13}{4}$　由条件与正弦定理得，$\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，则$\sin B+\sin(A+B)=2\sin A\cos B$，整理得$\sin B=\sin A\cos B-\cos A\sin B$，则$\sin B=\sin(A-B)$，所以$B=A-B$或$B+(A-B)=\pi$，则$A=2B$或$A=\pi$(舍去)，所以$C=\pi-3B$.

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，则$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin C=\sin(\pi-3B)=\sin 3B=\sin B\cos 2B+\cos B\sin 2B=\sin B\cos 2B+2\sin B\cos^2 B$.

所以$\frac{3a-c}{b}=\frac{3a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{3\sin A}{\sin B}-\frac{\sin C}{\sin B}=6\cos B-\cos 2B-2\cos^2 B=-4\cos^2 B+6\cos B+1$

$=-4\left(\cos B-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{13}{4}$，当$\cos B=\frac{3}{4}$时，$\frac{3a-c}{b}$取得最大值$\frac{13}{4}$.

17. 解：(1)设$\{a_n\}$的公比为$q$，

由$3a_2$是$a_1$，$9a_3$的等差中项得，$6a_2=a_1+9a_3$，…… 1分

则$6a_1q=a_1+9a_1q^2$，所以$6q=1+9q^2$，解得$q=\frac{1}{3}$. …… 4分

(2)由$a_2=\frac{2}{3}$得，$a_1q=\frac{2}{3}$，所以$a_1=2$，则$a_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. …… 5分

$b_n=\frac{na_n}{2}=n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，…… 6分

$T_n=\left(\frac{1}{3}\right)^0+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，…… 7分

所以$\frac{1}{3}T_n=\left(\frac{1}{3}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$，…… 8分

两式相减得，$\frac{2}{3}T_n=\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ …… 9分

$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ …… 10分

$=\frac{3}{2}-\left(n+\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$，…… 11分

所以$T_n=\frac{9}{4}-\frac{2n+3}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. …… 12分

18. 解：(1)由题意可知，$K^2=\frac{200\times(85\times35-65\times15)^2}{100\times100\times150\times50}=\frac{32}{3}\approx10.667$，…… 3分

因为$10.667<10.828$，…… 4分

所以没有 99.9%的把握认为共享单车使用寿命与款型有关. …………………………… 5 分

(2)从样本中随机抽取 1 辆,这辆单车使用寿命在 4 年以下的频率为$\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$, ……… 6 分

由题意可知,$X\sim B(3,\frac{3}{4})$, ……………………………………………………… 7 分

$P(X=0)=C_3^0(1-\frac{3}{4})^3=\frac{1}{64}$,$P(X=1)=C_3^1\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$,

$P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{4})^2\times(1-\frac{3}{4})=\frac{27}{64}$,$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$, ………………… 9 分

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{27}{64}$ |

……………… 11 分

$X$ 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$. ……………………………………………… 12 分

19.(1)证明:因为四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle BCD=60^\circ$,所以$\triangle BCD$ 为等边三角形,

因为 $H$ 为 $CD$ 的中点,所以 $BH\perp CD$,所以 $BH\perp AB$. ……………………………… 2 分

因为平面 $ABE\perp$平面 $BCD$,平面 $ABE\cap$平面 $BCD=AB$,

又 $BH\subset$平面 $BCD$,所以 $BH\perp$平面 $ABE$. ……………………………………… 3 分

又 $AE\subset$平面 $ABE$,所以 $AE\perp BH$. …………………………………………………… 4 分

(2)解:取 $AB$ 中点 $G$,因为四边形 $ABCD$,$ABEF$ 都为菱形,$\angle ABE=\angle BCD=60^\circ$,

所以 $EG\perp AB$,$DG\perp AB$,

因为 $H$ 为 $CD$ 的中点,所以 $DG/\!/BH$,

由(1)得 $DG\perp$平面 $ABE$,所以 $DG$,$EG$,$AB$ 两两垂直. ………………………………… 5 分

以 $G$ 为坐标原点,$\overrightarrow{DG}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{GE}$的方向分别为 $x$ 轴,$y$ 轴,$z$ 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB=2$,则 $B(0,1,0)$,$C(-\sqrt{3},2,0)$,$D(-\sqrt{3},0,0)$,$E(0,0,\sqrt{3})$,$F(0,-2,\sqrt{3})$,

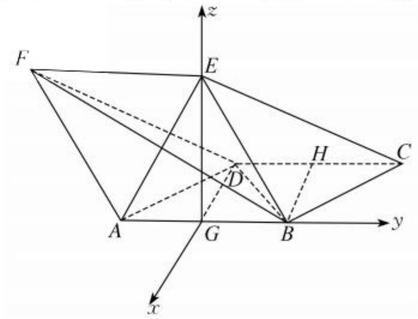
所以$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{BE}=(0,-1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BF}=(0,-3,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},-1,0)$. … 6 分

设平面 $BCE$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=0\\\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+y_1=0\\-y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$,

取 $y_1=\sqrt{3}$,则 $x_1=1$,$z_1=1$,所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$.

……………………………………………………… 8 分




设平面 $FBD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,则

$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}-\sqrt{3}x_2-y_2=0\\-3y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$,

取 $y_2=\sqrt{3}$,则 $x_2=-1$,$z_2=3$,所以 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},3)$, ……………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-1+3+3}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{65}}{13}$. …………………………………………… 11 分

所以平面 $FDB$ 与平面 $BCE$ 所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{65}}{13}$. ……………………… 12 分

20.解:(1)设 $M(x_0,y_0)$.

由抛物线的定义可知$|MF|=x_0+\frac{p}{2}$, ……………………………………………… 1 分

由题意可知 $|MD|=x_0$，由 $|MF|=|MD|+\frac{9}{4}$ 得 $\frac{p}{2}=\frac{9}{4}$，解得 $p=\frac{9}{2}$， ………………… 3分

故 $C$ 的方程为 $y^2=9x$. ……………………………………………………………… 4分

(2)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 $PQ$：$x=ty+m(m>0)$， ………………………… 5分

将 $x=ty+m$ 代入 $y^2=9x$，整理得 $y^2-9ty-9m=0$，

所以 $y_1y_2=-9m$，则 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{9}\cdot\frac{y_2^2}{9}=\frac{(y_1y_2)^2}{81}=m^2$， …………………………………… 7分

设点 $P$ 在第一象限，点 $Q$ 在第四象限，

当 $y>0$ 时，$y=3\sqrt{x}$，则 $y'=\frac{3}{2\sqrt{x}}$，所以直线 $AP$ 的斜率为 $k=\frac{3}{2\sqrt{x_1}}$，

则直线 $AP$ 的方程为 $y-y_1=\frac{3}{2\sqrt{x_1}}(x-x_1)$，即 $y=\frac{3}{2\sqrt{x_1}}x+\frac{3}{2}\sqrt{x_1}$， ……………… 8分

同理可知，直线 $AQ$ 的方程为 $y=-\frac{3}{2\sqrt{x_2}}x-\frac{3}{2}\sqrt{x_2}$， ………………………………… 9分

两直线方程联立方程组得 $\frac{3}{2\sqrt{x_1}}x+\frac{3}{2}\sqrt{x_1}=-\frac{3}{2\sqrt{x_2}}x-\frac{3}{2}\sqrt{x_2}$，

解得 $x=-\sqrt{x_1x_2}=-\sqrt{m^2}=-m$， ……………………………………………………… 10分

所以点 $A$ 的横坐标为 $-m$，

又知点 $A$ 在直线 $x=-2$ 上，所以 $-m=-2$，则 $m=2$，故直线 $PQ$：$x=ty+2$. ……… 11分

故直线 $PQ$ 过定点，其坐标为 $(2,0)$. …………………………………………………… 12分

21. (1)解：易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{9}{(x+1)^2}=\frac{2x^2-5x+2}{x(x+1)^2}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x(x+1)^2}$， …………………………………… 1分

当 $x\in(0,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\frac{1}{2},2)$ 时，$f'(x)<0$， …………………… 2分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2},2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. …… 3分

因此 $f(x)$ 的极大值为 $f(\frac{1}{2})=15-2\ln 2$，极小值为 $f(2)=2\ln 2+12$. ……………… 4分

(2)证明：$f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+(a+4)x+2}{x(x+1)^2}$.

由题意可知，$x_1,x_2$ 是方程 $2x^2+(a+4)x+2=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=-\frac{a+4}{2}$，$x_1x_2=1$，

……………………………………………………………………………………………… 5分

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2(\ln x_2-\ln x_1)-a(\frac{1}{x_2+1}-\frac{1}{x_1+1})}{x_2-x_1}=\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}-a\times\frac{x_1-x_2}{(x_2+1)(x_1+1)}}{x_2-x_1},$$

$$=\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+\frac{a}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}=\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-2.$$ …………………………………… 6分

要证明 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>-\frac{8}{a+4}-2$，只需证明 $\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-2>-\frac{8}{a+4}-2$，即证明 $\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}>\frac{2}{x_1+x_2}$， ……………………………………………………………………… 7分

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$，

只需证明 $\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}=\frac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$，……………………………… 8 分

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，则 $t>1$，只需证明 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，……………………………… 9 分

令 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则 $h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，……………………………… 10 分

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(t)>h(1)=\ln 1-\frac{2\times(1-1)}{1+1}=0$，……………… 11 分

所以 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，

故 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>-\frac{8}{a+4}-2$. ……………………………… 12 分

22. 解：(1) 由 $\begin{cases}x=\frac{2t+1}{6},\\ y=\sqrt{2t}\end{cases}$ ($t$ 为参数)，消去参数 $t$ 得 $y^2=6x-1$. ……………………………… 2 分

又 $y\geqslant0$，所以曲线 $C_2$ 的普通方程为 $y^2=6x-1(y\geqslant0)$. ……………………………… 3 分

(2) 由 $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{s}{2}},\\ y=s+1\end{cases}$ ($s$ 为参数)，消去参数 $s$ 得 $x^2=\frac{1}{2}(y-1)(x\geqslant0)$，

所以曲线 $C_1$ 的普通方程为 $x^2=\frac{1}{2}(y-1)(x\geqslant0)$. ……………………………… 5 分

由 $3\cos\theta-\sin\theta=0$ 得 $3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=0$，所以曲线 $C_3$ 的直角坐标方程为 $3x-y=0$，
……………………………… 6 分

由 $\begin{cases}3x-y=0,\\ x^2=\frac{1}{2}(y-1),\\ x\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=3,\end{cases}$

故 $C_3$ 与 $C_1$ 交点的直角坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 与 $(1,3)$. ……………………………… 8 分

由 $\begin{cases}3x-y=0,\\ y^2=6x-1,\\ y\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=1,\end{cases}$

故 $C_3$ 与 $C_2$ 交点的直角坐标为 $(\frac{1}{3},1)$. ……………………………… 10 分

23. (1) 解：不等式 $f(x)<3$，即 $2|1-x|-|1+x|<3$，……………………………… 1 分

当 $x\geqslant1$ 时，不等式化为 $-2(1-x)-(1+x)<3$，所以 $1\leqslant x<6$；……………………………… 2 分

当 $-1<x<1$ 时，不等式化为 $2(1-x)-(1+x)<3$，所以 $-\frac{2}{3}<x<1$，……………… 3 分

当 $x\leqslant-1$ 时，不等式化为 $2(1-x)+(1+x)<3$，无解，……………………………… 4 分

故不等式 $f(x)<3$ 的解集为 $(-\frac{2}{3},6)$. ……………………………… 5 分

(2) 证明：由条件可知 $a^2+4b^2+c^2=4$，……………………………… 6 分

由柯西不等式得 $(1^2+1^2+1^2)(a^2+4b^2+c^2)\geqslant(a+2b+c)^2$，……………………………… 8 分

所以 $a+2b+c\leqslant2\sqrt{3}$，……………………………… 9 分

当且仅当 $a=2b=c$，即 $a=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，取得等号. ……………………………… 10 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线