“江淮十校”2021 届高三第二次质量检测

数　　学(文科)

2020.11

命审单位:合肥一六八中学　　命审人:王军　孟梦

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x|x^2-3x-10<0\}$,$N=\{x|y=\sqrt{9-x^2}\}$,则 $(C_RN)\cap M$ 为

A. $\{x|3<x<5\}$　　B. $\{x|x<-3$ 或 $x>5\}$

C. $\{x|-3\leq x\leq -2\}$　　D. $\{x|-3<x<5\}$

2. 已知 $a=\ln\frac{2}{3}$,$b=2^{-\frac{1}{2}}$,$c=\ln 3$,则 a,b,c 的大小关系为

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$

C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

3. 下列选项中说法错误的是

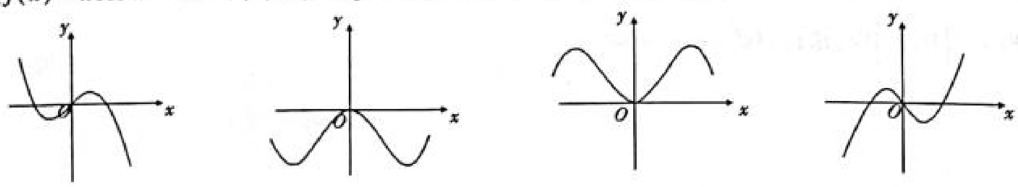
A. 命题 p: $\exists x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2+x_0+1<0$,则 $\neg p$: $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2+x+1\geq 0$

B. 在 $\triangle ABC$ 中,“若 $\sin A>\sin B$,则 $A>B$”的逆否命题是真命题

C. 函数 $f(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 上图象连续不间断,那么 $f(a)\cdot f(b)<0$ 是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点的充分不必要条件

D. 若 $p\wedge q$ 为假命题,则 p,q 均为假命题

4. 函数 $f(x)=x\cos x-\sin x$ 的导函数为 $f'(x)$,则函数 $f'(x)$ 的大致图象为



A　　B　　C　　D

5. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$A=\frac{\pi}{3}$,$a=2$,若满足条件的三角形有且只有两个,则边 b 的取值范围为

A. $2<b<4$　　B. $\sqrt{3}<b<2$

C. $2<b<\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $b>2$

6. 孙子定理是中国古代求解一次同余式组的方法，是数论中一个重要定理，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》，1852 年英国来华传教士伟烈亚力将其问题的解法传至欧洲，1874 年英国数学家马西森指出此法符合 1801 年由高斯得出的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为"中国剩余定理"。这个定理讲的是一个关于整除的问题，现有这样一个整除问题：将 2 至 2021 这 2020 个整数中能被 3 除余 2 且被 5 除余 1 的数按由小到大的顺序排成一列构成一数列，则此数列的项数是

A. 132　　B. 133　　C. 134　　D. 135

7. 已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，其中向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$方向上的投影为$\frac{1}{2}$. 若$(\lambda\vec{a}+\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$，则实数 λ 的值为

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

8. 圆心在坐标原点 O 的圆上有两点 B、C，点 B 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$且$|BC|=1$，若点 C 在角 α 的终边上且角 α 是三角形的一个内角，则$\sqrt{3}\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}$的值为

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

9. 已知$f(x)=\begin{cases}x^2-\log_{\frac{1}{2}}(x+1) & x\geq 0\\ f(-x) & x<0\end{cases}$，则不等式$f(x+2)>f(2x)$的解集为

A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|x>2\}$

C. $\left\{x|-\frac{2}{3}<x<2\right\}$　　D. $\left\{x|x<-\frac{2}{3}\text{或}x>2\right\}$

10. 将函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)+2\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 是偶函数，则 $\tan\varphi$ 的值为

A. -2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

11. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=\frac{1}{2}$，$n\geq 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，满足 $a_n+2S_nS_{n-1}=0$，数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前 n 项和为 T_n，则下列说法中错误的是

A. $a_2=-\frac{1}{4}$

B. $\frac{2}{S_6}=\frac{1}{S_4}+\frac{1}{S_8}$

C. 数列$\{S_n+S_{n+1}-S_{n+2}\}$的最大项为$\frac{7}{12}$

D. $2T_n=\frac{n-1}{n}T_n+\frac{n}{n+1}T_{n+1}$

12. 已知关于 x 的方程 $a\cos^2|x|+2\sin|x|-a+2=0$ 在 $x\in(-2\pi,2\pi]$ 有四个不同的实数解，则非零实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

C. $(0,2)$　　D. $(0,4)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知a,b为实数，函数$f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$4y-x-b=0$，则ab的值为______.

14. 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$，$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x+4y$的值为______.

15. 已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=4(a_1+a_3)$，$a_1+a_4=2a_3+10$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为______.

16. 已知函数$f(x)=2\ln x-2-ax$有两个零点为x_1,x_2，若$\ln(x_1\cdot x_2)\geqslant m$恒成立，则实数$m$的最大值为______.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知向量$\vec{a}=(2\cos x,-1)$，$\vec{b}=(\sin x+2\cos x,2\cos^2 x)$，设$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

(1)求$f(x)$的单调递增区间；

(2)已知角A为$\triangle ABC$的一个内角，且$f\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\sqrt{26}}{7}$，求$\cos A$的值.

18. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=(-1)^n(a_n+a_{n+1})$，求数列$\{b_n\}$的前2020项和S_{2020}.

19. 已知函数$f(x)=2\log_4 8x^2$，$g(x)=\log_2 x$的定义域均为$\left[\frac{1}{2},2\right]$.

(1)求函数$y=f(x)\cdot g(x)$的值域；

(2)若关于x的不等式$f(x^2)\cdot f(\sqrt{x})\leqslant kg^2(x)$有解，求实数$k$的取值范围.

20. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，$a=2$.

(1)若$\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=1-\dfrac{a-b}{a-c}$，求角$B$；

(2)若$c=2b$，当角B最大时，求$\triangle ABC$的面积.

21. 已知定义在$\mathbf{R}$的函数$f(x)=e^x-x$，设$g(x)=f(x)-f(-x)$.

(1)若$h(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，当$x\in(-\infty,0]$时$h(x)=f(x)$，试讨论$F(x)=xh(x)-2x(x>0)$的单调性；

(2)设$a_n=g'(n)-f(n)$，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，求满足$S_n\geq 36$的正整数n的最小值.

22. 已知$f(x)=e^x$，当$x\geq 0$时$f(2x)\geq ax+1$恒成立.

(1)求实数a的取值范围；

(2)当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，求证：$3x^2-\sin x\leq xe^{2x}$.

“江淮十校”2021 届高三第二次质量检测

数学试题参考答案(文科)

一、选择题

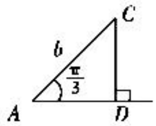
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	A	B	D	B	C	D	C	A	C	A	D	D

1. $M=(-2,5)$, $N=[-3,3]$, 则 $\complement_{R}N=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\Rightarrow(\complement_{R}N)\cap M=(3,5)$, 选 A.

2. $a=\ln\frac{2}{3}<\ln 1=0$, $0<b=2^{-\frac{1}{2}}<2^{0}=1$, $c=\ln 3>\ln e=1$, 选 B.

3. 命题 $p\wedge q$ 中一假则假,故“$p\wedge q$ 为假命题则 p、q 中至少有一个为假命题”,选 D.

4. $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$, 显然 $f'(x)$ 为偶函数, 排除 AD. 又 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上, $\sin x>0$, $\therefore f'(x)<0$, 排除 C, 故选 B.



5. $CD=b\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}b$. 若有两解, 则 $\frac{\sqrt{3}}{2}b<2<b\Rightarrow 2<b<\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 选 C.

6. 记 2 至 2021 中被 3 除余 2 的数构成数列 $\{a_n\}$, 记 2 至 2021 中被 5 除余 1 的数构成数列 $\{b_n\}$, 则 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 中公共项构成以 11 为首项, 15 为公差的等差数列, 记为 $\{c_n\}\Rightarrow c_n=11+15(n-1)=15n-4$, 令 $15n-4\leqslant 2021\Rightarrow n\leqslant 135$. 即共有 135 项, 选 D.

7. 记 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\theta$, 则 $|\vec{a}|\cos\theta=\frac{1}{2}$, $(\lambda\vec{a}+\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$, 得 $(\lambda\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2\lambda\vec{a}^{2}-\vec{b}^{2}+(2-\lambda)\vec{a}\cdot\vec{b}=2\lambda-1+(2-\lambda)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\lambda=0$, 故 $\lambda=0$, 选 C.

8. $|BC|=1$, $\therefore\triangle BOC$ 为等边三角形, $\because B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 即 $\angle BOX=\frac{\pi}{4}$, 而 α 为三角形的内角 $\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7}{12}\pi$,

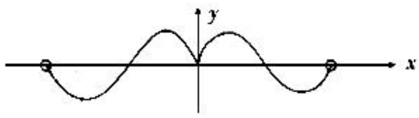
$\sqrt{3}\cos^{2}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^{2}\alpha-1)-\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha=-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{2}$, 选 A.

9. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $x\in[0,+\infty)$ 上, $f(x)$ 单调递增, 则 $x\in(-\infty,0)$ 上, $f(x)$ 单调递减, $f(x+2)>f(2x)\Rightarrow|x+2|>|2x|\Rightarrow x^{2}+4x+4>4x^{2}$, 即 $3x^{2}-4x-4<0\Rightarrow-\frac{2}{3}<x<2$, 故解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{2}{3}<x<2\right\}$, 选 C.

10. 由题意得, $f(x)$ 关于 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称, 则有 $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $f'(x)=2\cos(2x+\varphi)-4\sin(2x+\varphi)\Rightarrow f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)-4\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=2\sin\varphi+4\cos\varphi=0\Rightarrow\tan\varphi=-2$, 选 A.

11. $S_n - S_{n-1} + 2S_nS_{n-1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} + 2 = 0$，整理得 $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$，$(n \geqslant 2$ 且 $n \in \mathbf{N}_+)$，则 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 为以 2 为首项，以 2 为公差的等差数列 $\Rightarrow \frac{1}{S_n} = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$，$\therefore S_n = \frac{1}{2n}$，A 中，令 $n = 2 \Rightarrow a_2 + 2(a_1 + a_2) \cdot a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{4}$；B 中，$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 为等差数列，显然有 $\frac{2}{S_6} = \frac{1}{S_4} + \frac{1}{S_8}$；C 中，记 $b_n = S_n + S_{n+1} - S_{n+2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$，$b_{n+1} = S_{n+1} + S_{n+2} - S_{n+3} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}$；$\therefore b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+3)} < 0$，故 $\{b_n\}$ 为递减数列，$\therefore (b_n)_{\max} = b_1 = S_1 + S_2 - S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$. D 中，$\left\{\frac{T_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则有 $2\frac{T_n}{n} = \frac{T_{n-1}}{n-1} + \frac{T_{n+1}}{n+1} \Rightarrow 2T_n = \frac{n}{n-1}T_n + \frac{n}{n+1}T_{n+1}$，故选 D.

12. 令 $t = \sin|x|$，在 $(-2\pi, 2\pi)$ 内图象如下



得 $a(1-t^2) + 2t - a + 2 = 0$，即 $at^2 - 2t - 2 = 0$.

当 $a \neq 0$ 时，令 $\Delta = 0$，即 $4 + 8a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

此时，$t_1 = t_2 = -2$，x 无解.

$\Delta > 0$ 时，必有一根 $t_1 \in (-1, 1)$，记 $f(t) = at^2 - 2t - 2 \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow a(a-4) < 0$，得 $0 < a < 4$，选 D.

二、填空题

13. $\frac{3}{2}$

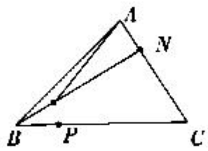
$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 1 - a$，故 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线为 $y - a = (1-a)(x-1) \Rightarrow y - (1-a)x + 1 - 2a = 0$.

$$\therefore \begin{cases} 1 - a = \frac{1}{4} \\ 1 - 2a = -\frac{b}{4} \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 2 \end{cases}，\therefore ab = \frac{3}{2}.$$

14. 1

显然，$\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AN}$，又 $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{NC} \Rightarrow \vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{12}\vec{AC}$，则 $x = \frac{2}{3}$，$y = \frac{1}{12}$，

故 $x + 4y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.



15. $a_n = 3^{n-1}$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_3)(1 + q) = 4(a_1 + a_3)$，显然 $a_1 + a_3 \neq 0 \Rightarrow 1 + q = 4$，$\therefore q = 3$.

又 $a_1 + a_4 = 2a_3 + 10 \Rightarrow a_1 + 27a_1 = 18a_1 + 10$，$\therefore a_1 = 1 \Rightarrow a_n = 3^{n-1}$.

16. 4

x_1, x_2 是 $f(x)=2\ln x-2-ax$ 的两个零点，不妨设 $0<x_1<x_2$

则 $\begin{cases}2\ln x_1=2+ax_1\\2\ln x_2=2+ax_2\end{cases}$ 两式相加，得 $\ln x_1+\ln x_2=2+\dfrac{a}{2}(x_1+x_2)$ 两式相减，得 $2\ln\dfrac{x_1}{x_2}=a(x_1-x_2)$，

故 $a=\dfrac{2\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，即 $2+\dfrac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\ln\dfrac{x_1}{x_2}\geqslant m$ 恒成立.

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，则 $t\subset(0,1)$

有 $2+\dfrac{t+1}{t-1}\ln t\geqslant m$ 恒成立，即 $\ln t-(m-2)\dfrac{t-1}{t+1}\leqslant 0$ 恒成立.

记 $g(t)=\ln t-(m-2)\dfrac{t-1}{t+1}$，$\because g(1)=0$，则 $g'(1)\geqslant 0$.

$g'(t)=\dfrac{1}{t}-(m-2)\dfrac{2}{(t+1)^2}$，$g'(1)=1-\dfrac{m-2}{2}\geqslant 0\Rightarrow m\leqslant 4$

下证充分性.

$m\leqslant 4$ 时，$g'(t)\geqslant\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{(t+1)^2}\geqslant 0$

$\therefore g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $g(t)<g(1)=0$ 恒成立，得证.

三、解答题

17. 解：(1) $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cos x(\sin x+2\cos x)-2\cos^2x=\sin 2x+2\cos^2x$

$=\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$

所以 $-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$ ………………………………………………… 6 分

(2) 由 $f\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1+\dfrac{\sqrt{26}}{7}$ 可得 $\cos\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{13}}{7}$，又角 A 为 $\triangle ABC$ 的一个内角

所以 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{6}{7}$

所以 $\cos A=\cos\left[\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{13}}{7}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{6}{7}=\dfrac{\sqrt{26}+6\sqrt{2}}{14}$ ………………………………… 12 分

18. 解：(1) 由 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$

可得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-1)^2$

所以 $na_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$ ………………………………………………………………… 5 分

5/5

$a_n=2-\frac{1}{n}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n=1,a_1=1$ 也满足

以 $a_n=2-\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$ ………………………………………………………… 6 分

(2) $S_{2020}=b_1+b_2+\cdots+b_{2020}$

$=-\left(2-\frac{1}{1}+2-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}\right)+\cdots-\left(2-\frac{1}{2019}+2-\frac{1}{2020}\right)+\left(2-\frac{1}{2020}+2-\frac{1}{2021}\right)$

$=1-\frac{1}{2021}=\frac{2020}{2021}$ ………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) $y=f(x)\cdot g(x)=2\log_4 8x^2\cdot(\log_2 x)=(3+2\log_2 x)(\log_2 x)$

令 $t=\log_2 x\in[-1,1]$，$y=(3+2t)t$

所以所求函数的值域为 $\left[-\frac{9}{8},5\right]$ ………………………………………………………… 6 分

(2) 由 $f(x^2)\cdot f(\sqrt{x})>kg(x)$ 可得 $(3+4\log_2 x)(3+\log_2 x)\geqslant k\log_2{}^2 x$，

因为 $f(x),g(x)$ 的定义域均为 $\left[\frac{1}{2},2\right]$

故 $\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2\\ \frac{1}{2}\leqslant\sqrt{x}\leqslant2\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\leqslant x^2\leqslant2\end{cases}$ ………………………………………………………… 8 分

令 $t=\log_2 x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 则 $(3+4t)(3+t)\leqslant kt^2,t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 有解

当 $t=0$ 时，$k\in\varnothing$

当 $t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 且 $t\neq0$ 时，$k\geqslant\frac{9}{t^2}+\frac{15}{t}+4$

所以当 $t=-\frac{1}{2}$ 时 $\frac{9}{t^2}+\frac{15}{t}+4$ 的最小值为 10

所以 $k\geqslant10$ ………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1) 因为 $\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=1-\frac{a-b}{a-c}$，所以得 $\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{a-c}=\frac{a}{b+c}$

得：$a^2+c^2-b^2-ac=0$，$\therefore\cos B=\frac{1}{2}$，$\because B$ 为△内角，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$ ………………………………………………………… 6 分

(2) 在△ABC 中，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c=2b$

所以 $\cos B=\frac{4+3b^2}{8b}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取等号

此时 $B=\frac{\pi}{6},C=\frac{\pi}{2}$，

所以 $S=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $h(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\in(-\infty,0]$ 时 $h(x)=f(x)$

所以当 $x>0$ 时 $h(x)=e^{-x}+x$. …………………………………………………………… 3 分

所以 $F(x)=xe^{-x}+x^2-2x$

$F'(x)=(1-x)(e^{-x}-2)$

因为 $x>0$ 时 $e^{-x}-2<0$，所以 $F'(x)=0$ 得 $x=1$

所以 $x\subset(0,1)$ 时 $F(x)$ 减函数；当 $x\subset(1,+\infty)$ 时 $F(x)$ 增函数 ………………………… 6 分

(2) $a_n=g'(n)-f(n)=e^{-n}+n-2$，则 $S_n=\dfrac{1}{e-1}(1-e^{-n})+\dfrac{n(n-3)}{2}$ ………………………… 8 分

因为 $0<\dfrac{1}{e-1}(1-e^{-n})<1$，

$b_n=\dfrac{n(n-3)}{2}$，$b_1=-1$，$b_2=0$，$b_{n+1}-b_n=n-1>0(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$

$b_{10}=35$，$b_{11}=44$

所以 $S_n\geqslant 36$ 的最小值为 11 ……………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f(2x)\geqslant ax+1$ 即 $e^{2x}-ax-1\geqslant 0$ 恒成立，

令 $h(x)=e^{2x}-ax-1(x\geqslant 0)$，则 $h'(x)=2e^{2x}-a$

当 $a\leqslant 2$ 时 $h'(x)\geqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是增函数，$h(0)=0$，$\therefore h(x)\geqslant 0$ 成立

当 $a>2$ 时，$\exists x_0$ 使 $h'(x_0)=0$

$x\in(0,x_0)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为减函数，$x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为增函数

所以 $h(x_0)<h(0)=0$ 不合题意

所以 $a\leqslant 2$ ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)得当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时 $e^{2x}\geqslant 2x+1$，所以

要证 $3x^2-\sin x\leqslant xe^{2x}$ 只要证 $3x^2-\sin x\leqslant x(2x+1)$ ………………………………………… 7 分

即证：$x^2-x-\sin x\leqslant 0$，设 $h(x)=x^2-x-\sin x$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$h'(x)=2x-1-\cos x$

$h''(x)=2+\sin x>0$

所以 $h'(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 是增函数

$h'(0)=-2$，$h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi-1>0$，所以存在 $x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 使 $h'(x_0)=0$

故 $x\in[0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 为减函数，$x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时 $h'(x)>0$ 则 $h(x)$ 为增函数

$h(0)=0$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\pi}{2}-1=\dfrac{\pi^2-2\pi-4}{4}<0$

所以 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时 $h(x)\leqslant 0$，故命题成立. …………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。