上饶市 2023 届第二次高考模拟考试数学（理）

参考答案和评分标准

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	D	B	C	A	C	D	C	B	D

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．1　14．$2\sqrt{5}$　15．$\frac{1}{3}$　16．10π

答案详解：

1．【答案】B

【详解】集合 $A=\{x|0\le x\le 1\}$，$B=\left\{y\middle|y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,x>-1\right\}=\{y|0<y<2\}$，

$\therefore A\cap B=(0,1]$

故选：B．

2．【答案】D

【详解】$\because \frac{2-i^3}{1+4i}=\frac{2+i}{1+4i}=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{6}{17}-\frac{7}{17}i$，

$\therefore Z=\frac{2-i^3}{1+4i}$ 对应的点 $\left(\frac{6}{17},-\frac{7}{17}\right)$，位于第四象限．

故选：D．

3．【答案】A

【详解】由题意知：$a_6+a_9=a_3+a_{12}$，则 $a_{12}=4$，则 $S_{23}=\frac{a_1+a_{23}}{2}\times 23=23a_{12}=92$

故选：A．

4．【答案】D

【详解】由已知得下底半径为 5 尺，下底半径为 $\frac{10}{3}$ 尺．所以圆台的体积为：

$$\frac{1}{3}\left(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}}\right)h=\frac{1}{3}\left(\frac{100}{9}\pi+25\pi+\sqrt{\frac{100}{9}\times 25\pi^2}\right)\times 10=\frac{4750}{9}=527\frac{7}{9}$$

故选：D．

5．【答案】B

【详解】由 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{1.5+1.6+2+2.4+2.5}{5}=2$，因为回归直线过样本中心 $(\bar{x},\bar{y})$，

$2=3\hat{b}+1.16$，$\hat{b}=0.28$，②错误；

可知 y 随着 x 变大而变大，所以变量 x 与 y 正相关，①③正确；

由回归直线可知，2022 年 7 月该新能源汽车厂的销量的估计值是 $\hat{y}=0.28\times7+1.16=3.12$ 万辆，④错误.

故选：B.

6. 【答案】C

【详解】因为 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}+\vec{b}=\left(2,\sqrt{2}\right)$，$\therefore|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{6}$，

$\therefore\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=6$，$\therefore 1+4+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=6\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

故选：C.

7. 【答案】A

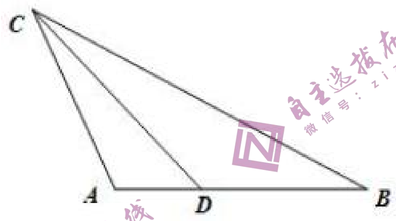
【详解】在 $\triangle ABC$ 中，根据余弦定理得 $AC^2=BC^2+AB^2-2BC\cdot AB\cdot\cos B=9$，$\therefore AC=3$，

$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\because CD$ 为角平分线 $\therefore\angle ACD=\dfrac{\pi}{12}$，$\angle CDA=\dfrac{\pi}{4}$

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin A}$ 得：$CD=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

故选：A.



8. 【答案】C

【详解】根据程序框图可知，执行程序输出的结果是 a，b，c 三个数中的最小值.

因为 $a=2=e^{\ln2}>e^{0.2}=b>1.2=c$，所以 $a>b>c$，所以输出的值为 $\dfrac{6}{5}$.

故选：C.

9. 【答案】D

【详解】方法一：设 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，则常数项为：$-x_1x_2x_3=-8$，因为 x_1，x_2，x_3 成等比数列，所以 $x_1x_3={x_2}^2$，所以 $x_2=2$，把 $x_2=2$ 代入 $f(x)=0$ 得 $a=14$.

方法二：若关于 x 的一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$（$a\neq0$，$x\in\mathbf{R}$）有三个根，由一元三次方程的韦达定理可知：$x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$，$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}$，可求得：$a=14$.

故选：D.

10. 【答案】C

【详解】$f\left(x\right)=\sin\pi\omega x+\sqrt{3}\cos\pi\omega x=2\sin\left(\pi\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

因为$x\in\left(0,1\right)$，所以$\pi\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

又因为函数$f\left(x\right)=\sin\pi\omega x+\sqrt{3}\cos\pi\omega x$ （$\omega>0$）在$\left(0,1\right)$内恰有 4 个极值点和 3 个零点，

由图像得：$\dfrac{7\pi}{2}<\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}\le 4\pi$，解得：$\dfrac{19}{6}<\omega\le\dfrac{11}{3}$，

所以实数ω的取值范围是$\dfrac{19}{6}<\omega\le\dfrac{11}{3}$

故选：C.

11. 【答案】B

【详解】

方法一：（双组线直角坐标方程和极坐标方程）

$\sqrt{\left(x+2\right)^2+y^2}\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}=4$，化简得：$x^4+2x^2y^2+y^4+8y^2-8x^2=0$

$\therefore P$点轨迹的直角坐标方程为：$\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$

极坐标方程为：$\rho^2=8\cos\left(2\theta\right)$

$\because\cos\left(2\theta\right)\le 1$，$\therefore\rho^2\le 8$，$\therefore 0\le\rho\le 2\sqrt{2}$ $\therefore\left|OP\right|$的取值范围是$\left[0,2\sqrt{2}\right]$

∴B 正确

方法二：（以x或y为主元的方程思想）

$\because\sqrt{\left(x+2\right)^2+y^2}\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}=4$，化简得：

$y^4+\left(2x^2+8\right)y^2+\left(x^2-4\right)^2-16=0$，$\therefore P$点的轨迹方程为：$\left[y^2+\left(x^2+4\right)\right]^2=16\left(x^2+1\right)$

对于 A：当$y=0$时，$x^2\left(x^2-8\right)=0$，此时$x=\pm 2\sqrt{2}$，$\left|PM\right|+\left|PN\right|=4\sqrt{2}$

∴A 错误.

对于 B：$\left[\left(y^2+x^2\right)+4\right]^2=16\left(x^2+1\right)$，即$\left[\left|\mathrm{OP}\right|^2+4\right]^2=16\left(x^2+1\right)$，$x\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$，

$\therefore\left|OP\right|\in\left[0,2\sqrt{2}\right]$. ∴B 正确.

对于 C：$\left[y^2+\left(x^2+4\right)\right]^2=16\left(x^2+1\right)\ge\left(x^2+4\right)^2$，$\therefore x\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$，∴C 错误.

对于 D：$S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}\left|PM\right|\cdot\left|PN\right|\sin\angle MPN\le\dfrac{1}{2}\left|PM\right|\cdot\left|PN\right|=2$，∴D 错误．故选：B.

12. 【答案】D

【详解】设$\left(x_1,y_1\right)$是曲线$y=\ln x+1$的切点，设$\left(x_2,y_2\right)$是曲线$y=x^2+x+3a$的切点，则切线方程分别为：

$y-\left(\ln x_1+1\right)=\frac{1}{x_1}\left(x-x_1\right)$，$y-\left(x_2{}^2+x_2+3a\right)=\left(2x_2+1\right)\left(x-x_2\right)$

对照斜率和纵截距可得：$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=2x_2+1\\ \ln x_1=-x_2{}^2+3a\end{cases}$，所以$3a=\ln x_1+x_2{}^2=\ln\frac{1}{2x_2+1}+x_2{}^2=-\ln\left(2x_2+1\right)+x_2{}^2$

（$x_2>-\frac{1}{2}$），令$\mathrm{h}\left(x\right)=-\ln\left(2x+1\right)+x^2$（$x>-\frac{1}{2}$）.

$h'\left(x\right)=-\frac{2}{2x+1}+2x=\frac{4x^2+2x-2}{2x+1}=\frac{2\left(x+1\right)\left(2x-1\right)}{2x+1}=0$，得：$x=\frac{1}{2}$

$\therefore h\left(x\right)$在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$是减函数，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$是增函数．$\therefore h_{\min}\left(x\right)=h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\ln 2$且$x\to-\frac{1}{2}$，$h\left(x\right)\to+\infty$；

$x\to+\infty$，$h\left(x\right)\to+\infty$．$\therefore 3a\geq\frac{1}{4}-\ln 2$．$\therefore a\geq\frac{1-4\ln 2}{12}$．故选：D.

13．【答案】1

【详解】展开式的通项为$C_6^r x^{6-r}\left(\frac{m}{x}\right)^r=C_6^r m^r x^{6-2r}$，令$6-2r=0$解得$r=3$，$\therefore C_6^3 m^3=20$．$\therefore m=1$．

14．【答案】$2\sqrt{5}$

【详解】AB的垂直平分线为$y=2$，AC的垂直平分线为$y=x+1$，联立解圆心坐标为$\left(1,2\right)$，半径为3，

所以圆的标准方程为$\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=9$，与$x$轴交于$M\left(1+\sqrt{5},0\right)$，$N\left(1-\sqrt{5},0\right)$，所以$\left|MN\right|=2\sqrt{5}$．

15．【答案】$\frac{1}{3}$

【详解】设$P\left(x_0,y_0\right)$，切点弦AB所在的直线方程为：$x_0x+y_0y=1$，则与x轴，y轴分别交于$M\left(\frac{1}{x_0},0\right)$，

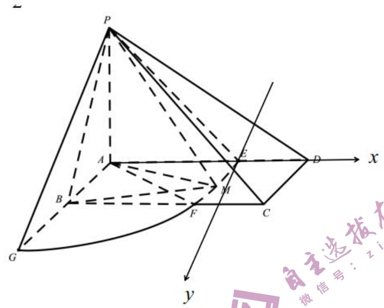
$N\left(0,\frac{1}{y_0}\right)$，所以$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left|x_0\right|\left|y_0\right|}$．$\because P\left(x_0,y_0\right)$是$\frac{|x|}{3}+\frac{|y|}{2}=1$上的点

$\therefore\frac{\left|x_0\right|}{3}+\frac{\left|y_0\right|}{2}=1\geq 2\sqrt{\frac{\left|x_0\right|\left|y_0\right|}{6}}$（当且仅当$\frac{\left|x_0\right|}{3}=\frac{\left|y_0\right|}{2}=\frac{1}{2}$，即$\left|x_0\right|=\frac{3}{2}$，$\left|y_0\right|=1$时等号成立）

$\therefore\frac{\left|x_0\right|\left|y_0\right|}{6}\leq\frac{1}{4}$，$\therefore\left|x_0\right|\left|y_0\right|\leq\frac{3}{2}$，$\therefore S_{\triangle MON}\geq\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$（当且仅当$\left|x_0\right|=\frac{3}{2}$，$\left|y_0\right|=1$时等号成立）

16．【答案】10π

【详解】因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，如图，易知 M 位于底面矩形 $ABCD$ 内以点 A 为焦点，CD 为准线的抛物线上，记点 M 的轨迹为曲线 EF．在矩形 $ABCD$ 内以点 E 为坐标原点，AD 为 x 轴，过点 E 作 AD 垂线为 y 轴建立如图示平面直角坐标系，得抛物线的标准方程为：$y^2=-8x$，$\therefore F\left(-1,2\sqrt{2}\right)$，$\therefore BF=1$．当点 M 位于 F 时，三棱锥 $P-ABM$ 的体积最小，由长方体外接球模型可知，三棱锥 $P-ABM$ 外接球球心为 PF 的中点，此外接球的半径为：$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{PA^2+AB^2+BF^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$\therefore S_{球}=4\pi R^2=10\pi$．



17．【解析】（1）当 $n=1$ 时，$1+\dfrac{1}{a_1}=2$，解得 $a_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，由 $\left(1+\dfrac{1}{a_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$，

得 $\left(1+\dfrac{1}{a_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{a_{n-1}}\right)=2^{\frac{(n-1)n}{2}}$，

两式相除得：$\dfrac{1}{a_n}+1=2^n$，即 $a_n=\dfrac{1}{2^n-1}$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 也满足，

所以 $a_n=\dfrac{1}{2^n-1}$．

（2）由（1）可知，$\dfrac{1}{a_n}=2^n-1$，所以 $\dfrac{n}{a_n}=n\cdot 2^n-n$，

所以 $S_n=\left(1\times 2^1-1\right)+\left(2\times 2^2-2\right)+\left(3\times 2^3-3\right)+\cdots+\left(n\cdot 2^n-n\right)$

$=\left(1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n\right)-\left(1+2+3+\cdots+n\right)$

令 $A_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，$B_n=1+2+3+\cdots+n$

$B_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$

$A_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$

$$2A_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$$

$$-A_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}$$

$$-A_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}$$

$\therefore A_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$，$\therefore S_n=A_n-B_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

18. 【解析】（1）2×2 列联表如下：

	不少于 600 元	少于 600 元	合计
男	25	20	45
女	15	40	55
合计	40	60	100

$$\kappa^2=\frac{100\times(25\times 40-15\times 20)^2}{45\times 55\times 40\times 60}=\frac{2450}{297}\approx 8.249>6.635$$

因此有 99%的把握认为购买金额是否少于 600 元与性别有关.

（2）按方案一：某游客可优惠 120 元.

按方案二：设优惠金额为 X 元，X 可能取值为 0，100，150，200.

$P(X=0)=C_3^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$，$P(X=100)=C_3^1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

$P(X=150)=C_3^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$，$P(X=200)=C_3^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

所以 X 的分布列为

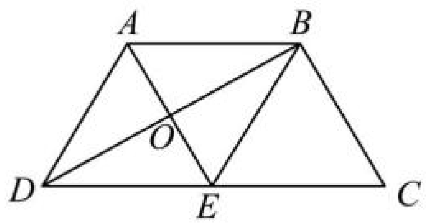
X	0	100	150	200
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{27}$

$$E(X)=0\times\frac{8}{27}+100\times\frac{4}{9}+150\times\frac{2}{9}+200\times\frac{1}{27}=\frac{2300}{27}<120$$

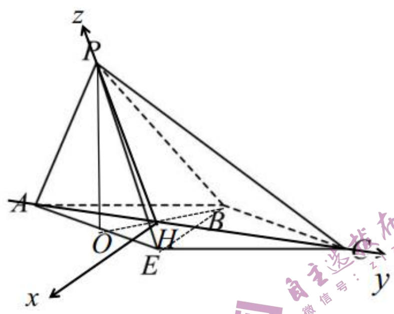
所以选择方案一

19. 【解析】（1）在图 1 中，连接 BE，BD，其中 BD 交 AE 于点 O. 因为 $AB\,/\!/\,DE$，$AB=DE=2$，故四边形 $ABED$ 为平行四边形，因为 $\angle D=60^\circ$，所以 $AD=2$，故四边形 $ABED$ 为菱形，所以 $OD\perp AE$，$OB\perp AE$，故折叠后 $OP\perp AE$，$OB\perp AE$，$OP=OB=\sqrt{3}$，所以 $\angle POB$ 为二面角 $P-AE-C$ 的平面角，

由余弦定理可知：$PB^2=PO^2+OB^2-2PO\cdot OB\cdot\cos\angle POB=4$，所以 $PB=2$，三棱锥 $PABE$ 为正四面体，所以点 P 在底面的投影 H 为 $\triangle ABE$ 的中心，所以 $BE\perp$ 平面 PAH，因为 $PA\subseteq$ 平面 PAH，所以 $BE\perp PA$.



（2）在图 2 中，以 H 为坐标原点，过 H 与 BE 平行线为 x 轴，AC 为 y 轴，HP 为 z 轴建立如图示空间直角坐标系.



则 $E\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，$P\left(0,0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$B\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，$C\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{PE}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(1,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$

即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\ x-\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$，所以 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},-1,-\sqrt{2}\right)$.

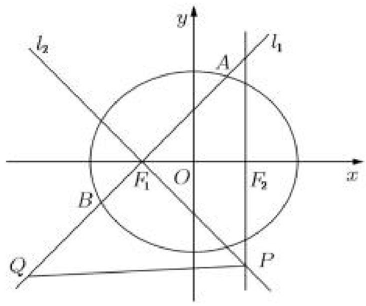
设直线 PE 与平面 PBC 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left(\overrightarrow{PE},\vec{n}\right)\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PE}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PE}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

∴直线 PE 与平面 PBC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$.

20．【解析】解：（1）由题意，得 $\begin{cases}\frac{2b^2}{a}=3\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$，

解得：$a^2=4$，$b^2=3$，所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.



（2）由（1）可得$F_1(-1,0)$，若直线l_1的斜率为0，则l_2的方程为：$x=-1$与直线$x=1$无交点，不满足条件.

设直线l_1：$x=my-1$，若$m=0$，则$\lambda=1$则不满足$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$，所以$m\neq 0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$，

由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\x=my-1\end{cases}$，得：$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$.

因为$\begin{cases}\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1B}\\\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}\end{cases}$即$\begin{cases}(-1-x_1,-y_1)=\lambda(x_2+1,y_2)\\(x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0)\end{cases}$

则$-y_1=\lambda y_2$，$y_1-y_0=\lambda(y_2-y_0)$

所以$\lambda=-\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{y_1-y_0}{y_2-y_0}$，解得$y_0=\dfrac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=-\dfrac{3}{m}$，$x_0=-4$

即点Q坐标为$\left(-4,-\dfrac{3}{m}\right)$9分

直线l_2的方程为：$x=-\dfrac{1}{m}y-1$

联立$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{m}y-1\\x=1\end{cases}$，解得$P(1,-2m)$

$\therefore |PQ|=\sqrt{5^2+\left(-\dfrac{3}{m}+2m\right)^2}\geq 5$，当且仅当$m=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$m=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时等号成立

$\therefore |PQ|$的最小值为5.

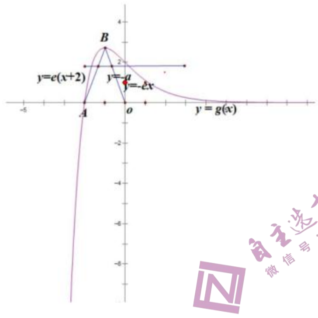
21．【解析】（1）由题意知 $f'(x)=a+\dfrac{x+2}{e^{x}}\le 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立

$\therefore -a\ge\dfrac{x+2}{e^{x}}$ 恒成立，令 $g(x)=\dfrac{x+2}{e^{x}}$，$x\in\mathbf{R}$，则 $-a\ge g(x)_{\max}$

$\therefore g'(x)=-\dfrac{x+1}{e^{x}}=0$，$\therefore x=-1$，

当 $x\in(-\infty,-1)$，$g'(x)>0$；$x\in(-1,+\infty)$，$g'(x)<0$

所以 $g(x)_{\max}=g(-1)=e$ 即 $-a\ge e$，$a\in(-\infty,-e]$



（2）方法一：（割线夹证零点差）

由 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，所以 $f'(x)=0$ 有两个不等的实数根 x_1，x_2，

由（1）可知 $-e<a<0$ 且 $-2<x_1<-1<x_2$

又过点 $(-2,0)$ 和 $(-1,e)$ 的直线方程为 $y=e(x+2)$

构造函数 $h(x)=g(x)-e(x+2)$，$x\in(-2,-1)$

$$=\frac{x+2}{e^{x}}-e(x+2)=(x+2)\left(\frac{1}{e^{x}}-e\right)>0$$

所以 $g(x)>e(x+2)$．

设方程 $e(x+2)=-a$ 的根为 x_3，则 $x_3=-\dfrac{a}{e}-2$

过点 $(-1,e)$ 和 $(0,0)$ 直线方程为 $y=-ex$

设 $m(x)=g(x)+ex$，$x\in(-1,+\infty)$

因为 $m'(x)=\dfrac{e^{x+1}-(x+1)}{e^{x}}>0$，所以 $m(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增

所以 $m(x)>m(-1)=0$ 则 $\mathrm{g}(x)>-ex$

又设方程 $-ex=-a$ 的根为 x_4，则 $x_4=\dfrac{a}{e}$

$\therefore x_2 - x_1 > x_4 - x_3 = \frac{a}{e} - \left(-\frac{a}{e} - 2\right) = \frac{2a}{e} + 2$

方法二：（借助极值点偏移进行放缩＋参数替换）

由 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2，所以 $f'(x)=0$ 有两个不等的实数根 x_1， x_2，

由（1）可知 $-e<a<0$ 且 $-2<x_1<-1<x_2$

构造 $G(x)=g(x)-g(-2-x)(x>-1)$，则

$G'(x)=g'(x)+g'(-2-x)=-\frac{x+1}{e^x}+\frac{x+1}{e^{-2-x}}=(x+1)\left(e^{x+2}-e^{-x}\right)$

$\because x>-1$，$\therefore (x+2)-(-x)=2x+2>0$， $x+1>0$.

$\therefore e^{x+2}>e^{-x}$，$\therefore G'(x)>0$.

$\therefore G(x)$ 是 $(-1,+\infty)$ 上的增函数，$\therefore G(x)>G(-1)=0$，$\therefore g(x)>g(-2-x)$，

$\because x_2>-1$，$\therefore g(x_2)>g(-2-x_2)$.

$\because g(x_1)=g(x_2)$，$\therefore g(x_1)>g(-2-x_2)$，

$\because x_1<-1$，$-2-x_2<-1$，$g(x)$ 是 $(-\infty,-1)$ 上的增函数，

$\therefore x_1>-2-x_2$，$\therefore x_1+x_2>-2$.

要证：$x_2-x_1>\frac{2a}{e}+2$（利用 $x_2>-2-x_1$ 放缩）

只需证：$-2-2x_1>\frac{2a}{e}+2$

只需证：$x_1<-2-\frac{a}{e}$（参数 $-a=\frac{x_1+2}{e^{x_1}}$ 替换）

只需证：$x_1<-2+\frac{x_1+2}{e^{x_1+1}}$

只需证：$(x_1+2)\left(1-\frac{1}{e^{x_1+1}}\right)<0$

$\because x_1\in(-2,-1)$，$\therefore x_1+2>0$，$x_1+1\in(-1,0)$，

$\therefore e^{x_1+1}\in\left(e^{-1},1\right)$，$\therefore 1-\frac{1}{e^{x_1+1}}<0$.

$\therefore (x_1+2)\left(1-\frac{1}{e^{x_1+1}}\right)<0$，$\therefore x_2-x_1>\frac{2a}{e}+2$ 得证.

22. 【解析】（1）$\because x=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{1-\left(1-2\sin^2\alpha\right)}{1+\left(2\cos^2\alpha-1\right)}=\dfrac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$， $y=2\tan\alpha$， $\therefore y^2=4x$.

则曲线 C_1 的普通方程为：$(y-1)^2=4x$.

$P(1,1)$

（2）设直线 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ （t 为参数）

联立直线 l 的参数方程与曲线 C_1 的普通方程得：$t^2\sin^2\alpha-4t\cos\alpha-4=0$

设 A， B 两点对应的参数分别为 t_1， t_2， $\therefore \begin{cases}t_1+t_2=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\\ t_1t_2=\dfrac{-4}{\sin^2\alpha}(t_1>0,t_2<0)\end{cases}$

$\because \dfrac{1}{|PB|}-\dfrac{1}{|PA|}=\dfrac{1}{|t_2|}-\dfrac{1}{|t_1|}=\dfrac{|t_1|-|t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{t_1+t_2}{|t_1t_2|}=\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$， $\therefore k=\sqrt{3}$，

$\therefore$直线 l 的直角坐标方程为：$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}+1=0$

23. 【解析】（1）$\because \begin{cases}f(4)=7\\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=7\end{cases}$， $\therefore m=3$，经检验得：$m=3$ 符合题意

（2）$\because a+b+c=m=3$，

$\therefore (a+c)^2+(a+b+2c)^2+(2a+b+c)^2=(3-b)^2+(3+c)^2+(a+3)^2=(b-3)^2+(c+3)^2+(a+3)^2$

由柯西不等式可知：

$\left[(b-3)^2+(c+3)^2+(a+3)^2\right]\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq\left[(b-3)+(c+3)+(a+3)\right]^2=36$

$\therefore (b-3)^2+(c+3)^2+(a+3)^2\geq 12$，即 $(a+c)^2+(a+b+2c)^2+(2a+b+c)^2\geq 12=4\mathrm{m}$

当且仅当 $a=-1$， $b=5$， $c=-1$ 时成立