座位号＿＿＿＿ 考号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿

密封线内不要答题

绝密★启用前

高三 9 月联考

数　学(文科)

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:集合与常用逻辑用语、函数与导数、三角函数与解三角形(约 70%),其他内容(约 30%)。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2\leqslant 2x\}$,集合 $B=\{x\in \mathbf{Z}|0<x<3\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|0\leqslant x<3\}$

2. 已知复数 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$($\mathrm{i}$ 是虚数单位),则 $|\bar{z}+2\mathrm{i}|=$

A. $\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 设向量 a,b 满足 $|a|=2,|b|=1$,a 与 b 的夹角为 60°,则 $|a+2b|=$

A. $2\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

4. 下列函数中,既是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上又是减函数的是

①$y=\cos 2\,022x$;②$y=|x+1|$;③$y=x^{-2}$;④$y=x-\frac{2}{x}$.

A. ①④　　B. ②③　　C. ③　　D. ②

5. 若 $\frac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{8}{3}$,则 $\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=$

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

6. 已知 p:$\forall x\in[1,2]$,$x^2-a\geqslant 0$,q:$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2+2ax_0+2-a=0$,若"p 且 q"是真命题,则实数 a 的取值范围是

A. $a\leqslant -2$　　B. $a\leqslant 1$

C. $a\leqslant -2$ 或 $a=1$　　D. $a>-2$ 且 $a\neq 1$

7. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中,a_3,$3a_1$,a_2 成等差数列,其前 n 项和为 S_n,若 $S_n=ka_n-1$,则 a_{2022} 为

A. 2^{2021}　　B. 2^{2022}

C. $2\times(-3)^{2021}$　　D. 2×3^{2021}

8. 在 $\triangle ABC$ 中,"$\tan A\tan B=1$"是"$\sin^2A+\sin^2B=1$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$,则关于 $f(x)$ 说法错误的是

A. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度后所得的函数为 $y=-\cos x$

B. $f(x)$ 的图象与 $g(x)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有 3 个零点,则实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{8\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right]$

10. 已知 F_1,F_2 是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{15}=1(a>\sqrt{15})$ 的两个焦点,P 为 C 上一点,且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$,$|PF_1|=5|PF_2|$,则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{15}=1$　　B. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{15}=1$

C. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{15}=1$　　D. $\frac{x^2}{42}+\frac{y^2}{15}=1$

11. 下列函数中,最大值是 1 的函数是

A. $y=|\sin x|+|\cos x|$　　B. $y=\cos^2x+4\sin x-4$

C. $y=\cos x\cdot\tan x$　　D. $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2}-\cos x}$

12. 已知函数 $f(x)=ae^x+4x$,对任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $x_1\neq x_2$,不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>x_1+x_2$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是

A. $\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{2}{e^2},+\infty\right)$

C. $\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{2}{e^2},+\infty\right)$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若角 α 的终边在第四象限,且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,则 $\tan(\pi-\alpha)=$＿＿＿＿.

14. 已知曲线 $y=\ln x+2$ 的一条切线是 $y=kx+1$,则实数 $k=$＿＿＿＿.

15. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $(a+b)\cos C=c(\cos A+\cos B)$,$a=4$,$b=6$,则 $c=$＿＿＿＿

16. 对于定义域为 D 的函数 $f(x)$，若存在 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_1+x_2)-\frac{1}{2}$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 M. 若函数 $f(x)=|\log_2 x-1|$，$x\in(0,\sqrt{a}]$ 具有性质 M，则实数 a 的最小值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 的对边，$c\sin\frac{A+C}{2}=b\sin C$.

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{2}{\tan B}$，$b=2$，求△$ABC$ 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

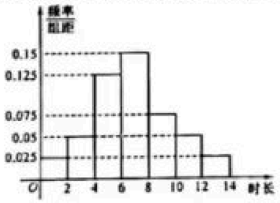
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_3+3a_6=30$，$2S_4+S_7=51$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=a_n\cdot 2^{n-1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

"学习强国"学习平台是由中宣部主管，以深入学习宣传习近平新时代中国特色社会主义思想为主要内容，立足全体党员，面向全社会的优质平台. 该平台首次实现了"有组织，有管理，有指导，有服务"的学习，极大地满足了广大党员干部和人民群众多样化、自主化、便捷化的学习需求，日益成为老百姓了解国家动态，紧跟时代脉搏的热门 APP. 某市宣传部门为了解市民利用"学习强国"学习国家政策的情况，从全市抽取 1 000 人进行调查，统计市民每周利用"学习强国"的时长，下图是根据调查结果绘制的频率分布直方图.



(1)估计该市市民每周利用"学习强国"时长在区间[6,8)内的概率；

(2)估计该市市民每周利用"学习强国"的平均时长；

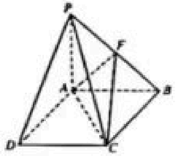
(3)若宣传部为了解市民每周利用"学习强国"的具体情况，准备采用分层抽样的方法从[4,6)和[10,12)组中抽取 7 人了解情况，从这 7 人中随机选取 2 人参加座谈会，求所选取的 2 人来自不同的组的概率.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=PA$，F 是 PB 中点.

(1)求证：$AF\perp$ 平面 PBC；

(2)若 $AB=2$，求点 P 到平面 ACF 的距离.



21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}ax^2+1(a\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)讨论 $f'(x)$ 的单调性；

(2)设 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点，证明：$0<\frac{1}{x_1x_2}<1$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2+8\rho^2\sin^2\theta-9=0$.

(1)求 l 的极坐标方程和 C 的直角坐标方程；

(2)若 l 与 C 交于 A，B 两点，求 $|OA|+|OB|$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-4|+|x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集；

(2)设 $g(x)=f(x)-|x-2|$，若 $g(x)$ 的最小值为 m，实数 a，b，c 均为正数，且 $a+b+c=m$，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值.

高三 9 月联考·数学(文科)

参考答案、提示及评分细则

1. B　由 $x^2 \leqslant 2x$ 得 $0 \leqslant x \leqslant 2$，所以 $A=[0,2]$，又 $B=\{1,2\}$，所以 $A \cap B=\{1,2\}$. 故选 B.

2. A　$z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，则 $|\bar{z}+2\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}+2\mathrm{i}|=|1+3\mathrm{i}|=\sqrt{10}$. 故选 A.

3. A　因为 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=4+4\times 2\times 1\times \cos 60^\circ+4=12$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$. 故选 A.

4. C　$y=\cos 2\,022x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是单调函数，$y=|x+1|$ 的图象不关于 y 轴对称，不是偶函数，$y=x^{-2}$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$y=x-\dfrac{2}{x}$ 是奇函数. 故选 C.

5. B　因为 $\dfrac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{8}{3}$，所以 $\dfrac{3\tan\alpha+2}{2\tan\alpha-1}=\dfrac{8}{3}$，解得 $\tan\alpha=2$，所以 $\tan\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\dfrac{3\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\dfrac{3\pi}{4}}=\dfrac{2-1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$. 故选 B.

6. C　若 p 真，则 $a \leqslant 1$；若 q 真，则 $a \leqslant -2$ 或 $a \geqslant 1$. 又因为“p 且 q”是真命题，所以 $a \leqslant -2$ 或 $a=1$. 故选 C.

7. B　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$q>0$. 因为 $a_2,3a_1,a_3$ 成等差数列，所以 $6a_1=a_1q+a_1q^2 \Rightarrow q=2$. 又因为 $S_1=a_1=ka_1-1 \Rightarrow a_1=\dfrac{1}{k-1}$；$S_2=a_1+2a_1=2ka_1-1 \Rightarrow a_1=\dfrac{1}{2k-3}$，所以 $k=2$，$a_1=1$. 所以 $a_n=2^{n-1}$，$a_{2\,022}=2^{2\,021}$. 故选 B.

8. A　若 $\tan A\tan B=1$，则 $\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}=1$，即 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=0$，所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，即 $A=\dfrac{\pi}{2}-B$，所以 $\sin A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$，所以 $\sin^2 A=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\cos^2 B=1-\sin^2 B$，所以 $\sin^2 A+\sin^2 B=1$，所以“$\tan A\tan B=1$”是“$\sin^2 A+\sin^2 B=1$”的充分条件. 若 $\sin^2 A+\sin^2 B=1$，则 $\cos^2 A+\cos^2 B=1$，则 $\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A+\cos^2 A}+\dfrac{\cos^2 B}{\sin^2 B+\cos^2 B}=1$，即 $\dfrac{1}{\tan^2 A+1}+\dfrac{1}{\tan^2 B+1}=1$，所以 $\tan^2 A\tan^2 B=1$，所以 $\tan A\tan B=1$ 或 $\tan A\tan B=-1$，所以“$\tan A\tan B=1$”不是“$\cos^2 A+\cos^2 B=1$”的必要条件，所以“$\tan A\tan B=1$”是“$\cos^2 A+\cos^2 B=1$”的充分不必要条件. 故选 A.

9. D　因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，对于 A，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{5\pi}{6}$ 个单位长度后所得的函数为 $y=\sin\left(x-\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ 的图象[illegible]

于 B，因为 $f(-x)=\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\pi-\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=g(x)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象关于 y 轴对称，所以选项 B 正确；对于 C，由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 得 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$，所以选项 C 正确；对于 D，由 $3\pi\leqslant a+\frac{\pi}{3}<4\pi$，解得 $\frac{8\pi}{3}\leqslant a<\frac{11\pi}{3}$，所以选项 D 错误. 故选 D.

10. C　在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{15}=1(a>\sqrt{15})$ 中，由椭圆的定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，因为 $|PF_1|=5|PF_2|$，所以 $|PF_2|=\frac{a}{3}$，$|PF_1|=\frac{5a}{3}$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=2c$，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，即 $4c^2=\frac{25a^2}{9}+\frac{a^2}{9}-\frac{5a^2}{9}=\frac{21a^2}{9}$，所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{21}{36}$，又 $b^2=15$，所以 $a^2=36$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{15}=1$. 故选 C.

11. D　对于 A，$y=\sqrt{(|\sin x|+|\cos x|)^2}=\sqrt{1+|\sin 2x|}\leqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $\sin 2x=\pm1$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时取"="，即当 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\max}=\sqrt{2}$，A 不正确；对于 B，$y=\cos^2x+4\sin x-4=1-\sin^2x+4\sin x-4=-(\sin x-2)^2+1$，当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=0$，故 B 错误；对于 C，$y=\cos x\cdot\tan x=\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x$，显然 $\sin x$ 最大值为 1，此时 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，而 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=\cos x\cdot\tan x$ 无意义，即 $\sin x$ 取不到 1，故 C 不正确；对于 D，令 $P(\cos x,-\sin x)$，$A(\sqrt{2},0)$，则 y 的值域即为直线 PA 的斜率的范围，显然点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，设直线 PA 的方程为 $y=k(x-\sqrt{2})$，即 $kx-y-\sqrt{2}k=0$，则圆心 $(0,0)$ 到 PA 的距离 $d=\frac{|-\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant1$，解得 $-1\leqslant k\leqslant1$. 故 $y_{\max}=1$，故 D 正确. 故选 D.

12. B　不妨设 $x_1>x_2$，由 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>x_1+x_2$，得 $f(x_1)-f(x_2)>x_1^2-x_2^2$，即 $f(x_1)-x_1^2>f(x_2)-x_2^2$，令 $g(x)=f(x)-x^2$，所以对任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_1>x_2$ 时，都有 $g(x_1)>g(x_2)$，即 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)=ae^x-2x+4\geqslant0$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\geqslant\frac{2x-4}{e^x}$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上恒成立. 令 $h(x)=\frac{2x-4}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{6-2x}{e^x}$，令 $h'(x)>0$，解得 $x<3$，令 $h'(x)<0$，解得 $x>3$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(3)=\frac{2}{e^3}$，所以 $a\geqslant\frac{2}{e^3}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{e^3},+\infty\right)$. 故选 B.

13\. $\frac{3}{4}$ 因为角 α 的终边在第四象限，且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan(\pi-\alpha)=\tan\alpha$ $=\frac{3}{4}$.

14\. 1 设切点为 $(x_0,\ln x_0+2)(x_0>0)$，又 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为 $y-(\ln x_0+2)=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，即 $y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0+1$，所以 $\begin{cases}\frac{1}{x_0}=k,\\ \ln x_0+1=1,\end{cases}$ 解得 $k=1$.

15\. $2\sqrt{7}$ 由正弦定理得 $(\sin A+\sin B)\cos C=\sin C(\cos A+\cos B)$，所以 $\sin A\cos C+\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin C\cos B$，所以 $\sin A\cos C-\sin C\cos A=\sin C\cos B-\sin B\cos C$，$\sin(A-C)=\sin(C-B)$，又 A,B,C 是三角形内角，$A-C+C-B=A-B\in(-\pi,\pi)$，所以 $A-C=C-B$，所以 $A+B=2C$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4^2+6^2-2\times4\times6\times\frac{1}{2}=28$，所以 $c=2\sqrt{7}$.

16\. $8\sqrt{2}+8$ 设 $x_1<x_2$，由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得，$|\log_2 x_1-1|=|\log_2 x_2-1|$，则 $1-\log_2 x_1=\log_2 x_2-1$，故 $\log_2 x_1x_2=2$，$\therefore x_1x_2=4(x_1<2,x_2>2)$，又 $f(x_1+x_2)=|\log_2(x_1+x_2)-1|=\log_2(x_1+x_2)-1$，$\therefore \log_2(x_1+x_2)-1-\frac{1}{2}=\log_2 x_2-1$，即 $\log_2\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)=\frac{1}{2}$，$\frac{x_1}{x_2}=\sqrt{2}-1$，$\because x_1=\frac{4}{x_2}$，$\therefore \frac{4}{x_2^2}=\sqrt{2}-1$，$x_2^2=4\sqrt{2}+4$，$\because \sqrt{a}\geqslant x_1+x_2$，$\therefore a\geqslant(x_1+x_2)^2=\frac{16}{x_2^2}+8+x_2^2=8\sqrt{2}+8$，则实数 a 的最小值为 $8\sqrt{2}+8$.

17\. 解：(1)由 $c\sin\frac{A+C}{2}=b\sin C$ 及正弦定理得 $\sin C\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin C$， …………………………… 1分

因为 $B,C\in(0,\pi)$，则 $\sin C>0$ 且 $\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin B=\sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{\pi-B}{2}=\cos\frac{B}{2}$， …………………………………………… 4分

即 $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{B}{2}$，则 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，可得 $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …………………………… 6分

(2) $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A\sin C+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}$， ……………… 8分

$\frac{2}{\tan B}=\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{1}{\sin B}$，所以 $\sin A\sin C=\sin^2 B$，所以 $ac=b^2=4$， ……………………………… 10分

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 12分

18\. 解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，所以 $\begin{cases}a_1+2d+3(a_1+5d)=30,\\ 2\times\left(4a_1+\frac{4\times3d}{2}\right)+7a_1+\frac{7\times6d}{2}=51,\end{cases}$ ……………

解得$\begin{cases}a_1=-1,\\d=2,\end{cases}$ ………………………………………… 4 分

所以 $a_n=-1+2(n-1)=2n-3$. ………………………………………… 6 分

(2)由(1)知,$b_n=a_n\cdot 2^{n-1}=(2n-3)\cdot 2^{n-1}$, ………………………………………… 7 分

所以 $T_n=-1\times 2^0+1\times 2+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n-1}$,所以 $2T_n=-1\times 2+1\times 2^2+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n$,

所以 $-T_n=-1+2\times(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-3)\cdot 2^n=-5-(2n-5)\cdot 2^n$, ………………… 10 分

所以 $T_n=5+(2n-5)\cdot 2^n$. ………………………………………… 12 分

19. 解:(1)由题意知,该市市民每周利用"学习强国"时长在[6,8)内的频率为 $0.15\times 2=0.3$,

所以估计该市市民每周利用"学习强国"时长在[6,8)内的概率为 0.3. ………………………… 2 分

(2)由题意知各组的频率分别为 0.05,0.1,0.25,0.3,0.15,0.1,0.05, ………………………… 4 分

所以 $\bar{x}=1\times 0.05+3\times 0.1+5\times 0.25+7\times 0.3+9\times 0.15+11\times 0.1+13\times 0.05=6.8$,

所以估计该市市民每周利用"学习强国"的平均时长在 6.8 小时. ………………………… 7 分

(3)由(2)知,利用"学习强国"时长在[4,6)和[10,12)的频率分别为 0.25,0.1,故两组人数分别为 250,100, ………………………………………… 8 分

采用分层抽样的方法从[4,6)组抽取人数为 $250\times\frac{7}{350}=5$,记作 a,b,c,d,e;从[10,12)组抽取人数为 $100\times\frac{7}{350}=2$,记作 A,B; ………………………………………… 9 分

从 7 人中抽取 2 人的基本事件有 $ab,ac,ad,ae,aA,aB,bc,bd,be,bA,bB,cd,ce,cA,cB,de,dA,dB,eA,eB,AB$,共 21 个,来自不同组的基本事件有 $aA,aB,bA,bB,cA,cB,dA,dB,eA,eB$,共 10 个, ………… 11 分

故所求概率 $P=\frac{10}{21}$. ………………………………………… 12 分

20. (1)证明:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BC$. ………………………… 1 分

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $BC\perp AB$,

因为 $PA\cap AB=A$,$PA,AB\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp$ 平面 PAB. ………………………… 2 分

因为 $AF\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp AF$.

因为 $AB=PA$,F 是 PB 中点,所以 $AF\perp PB$,

因为 $PB\cap BC=B$,$PB,BC\subset$ 平面 PBC,所以 $AF\perp$ 平面 PBC. ………………………… 5 分

(2)解:由(1)知 $BC\perp$ 平面 PAB.

因为 $PB\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp PB$. ………………………………………… 6 分

同理可得 $PA\perp AB$，$AF\perp CF$. ………………………………………………………… 8 分

由题意得 $AF=BF=\frac{1}{2}PB=\sqrt{2}$，

所以 $CF=\sqrt{BC^2+BF^2}=\sqrt{6}$，

所以$\triangle ACF$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times AF\times CF=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{3}$，

$V_{三棱锥P-ACF}=V_{三棱锥C-APF}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PAF}\times BC=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)\times 2=\frac{2}{3}$.

设 P 到平面 ACF 的距离为 d，则$\frac{1}{3}\times S\times d=\frac{\sqrt{3}}{3}d=\frac{2}{3}$，解得 $d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故 P 到平面 ACF 的距离为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

21.(1)解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=\ln x-ax+1$，设 $g(x)=\ln x-ax+1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$. ……………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；……………………… 2 分

当 $a>0$ 时，由 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$；由 $g'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$，

即 $f'(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减. ……………………… 3 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当 $a>0$ 时，$f'(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减. ………………………………………………………… 4 分

(2)证明：$f'(x)=\ln x-ax+1$，

因为 x_1，x_2 是函数 $f(x)$的两个极值点，

所以 $\ln x_1-ax_1+1=0$，$\ln x_2-ax_2+1=0$， ……………………………………… 6 分

两式相减得，$a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$. ………………………………………………… 7 分

欲证 $0<\frac{1}{x_1x_2}<1$，只需证 $x_1x_2>1\Leftrightarrow\ln x_1+\ln x_2>0\Leftrightarrow(ax_1-1)+(ax_2-1)>0\Leftrightarrow a>\frac{2}{x_1+x_2}\Leftrightarrow$

$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$①， ………………………………………………… 9 分

不妨设 $0<x_1<x_2$，故①变形为 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$②， ……………… 10 分

令 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，设 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$， …………………… 11 分

则 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，则 $h(t)<h(1)=0$，

故②式成立，得证. …………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)消去直线 l 参数方程中的参数 t 得 $x=\sqrt{3}y$，显然直线 l 过原点，倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，直线 l 的极坐标方程为

$\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$. ………………………………………………………………………………………… 2 分

曲线 C 的极坐标方程化为 $\rho^2\cos^2\theta+9\rho^2\sin^2\theta=9$，将 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y\end{cases}$ 代入得：$x^2+9y^2=9$，即 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，

…… 4 分

所以 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$，$C$ 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ……………………………… 5 分

(2)把 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$ 代入 $\rho^2+8\rho^2\sin^2\theta-9=0$ 得 $\rho^2=3$，解得 $\rho=\pm\sqrt{3}$， ……………………………… 7 分

所以 $|OA|=|OB|=\sqrt{3}$，

所以 $|OA|+|OB|=2\sqrt{3}$. ………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)\geqslant 4$，即 $|2x-4|+|x+1|\geqslant 4$.

当 $x\geqslant 2$ 时，$2x-4+x+1\geqslant 4$，解得 $x\geqslant\frac{7}{3}$； ……………………………………………………………… 1 分

当 $-1<x<2$ 时，$4-2x+x+1\geqslant 4$，解得 $x\leqslant 1$，又 $-1<x<2$，所以 $-1<x\leqslant 1$； ……………………………… 3 分

当 $x\leqslant -1$ 时，$4-2x-x-1\geqslant 4$，解得 $x\leqslant-\frac{1}{3}$，又 $x\leqslant -1$，所以 $x\leqslant -1$. ……………………………… 4 分

综上，不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集为 $(-\infty,1]\cup\left[\frac{7}{3},+\infty\right)$. ……………………………………………… 5 分

(2) $g(x)=|2x-4|+|x+1|-|x-2|=|x-2|+|x+1|\geqslant|(x-2)-(x+1)|=3$， …………………… 7 分

当且仅当 $(x-2)(x+1)\leqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时取等号，所以 $g(x)_{\min}=3$，即 $m=3$. …………………… 8 分

所以 $a+b+c=3$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{3}\left(3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geqslant$

$\frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}\right)=3$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时，等号成立，

即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值为 3. ……………………………………………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。