安庆示范高中 2023 届高三联考

数学试题参考答案

一、单项选择题:本题共 8 小题. 每小题 5 分,共 40 分.

1－4 DBCB　　5－8 ABCD

1. D 【解析】由条件知 $A=(-1,3)$,$B=[-3,1]$,所以 $A\cap B=(-1,1]$,故选 D.

2. B 【解析】由题意知 $z=\dfrac{5+5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{5(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=3+\mathrm{i}$,于是 $\bar{z}=3-\mathrm{i}$,其虚部为 -1,故选 B.

3. C 【解析】根据正态分布的特点不难得出 $P(X>9.6)>P(X<10.2)$,C 错误.

4. B 【解析】由条件,两边同时平方整理得 $2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$,解得 $\sin\theta=1$ 或 $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$,故选 B.

5. A 【解析】由题意可知 $2a+b=1$,于是 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a+b}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}+1\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{2a}{b}}+1=2\sqrt{2}+1$,当且仅当 $a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$,$b=\sqrt{2}-1$ 时,$\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+1$,故选 A.

6. B 【解析】由条件知当 $x_2=8.4$ 时,$\hat{y}_2=83-1=82$,代入 $\hat{y}=-20x+a$,解得 $a=82+20\times 8.4=250$,于是 $\hat{y}=-20x+250$,又 $x=8.5$,所以 $y=80$,即 $\dfrac{84+83+78+m}{4}=80$,解得 $m=75$,故选 B.

7. C 【解析】将直线 l 整理得到 $(2x-y-1)m+(x+y-5)=0$,于是 $\begin{cases}2x-y-1=0\\x+y-5=0\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$,所以直线 l 恒过点 $C(2,3)$,根据题意知点 B 在以线段 AC 为直径的圆上,该圆的圆心坐标为 $D(-1,2)$,半径大小为 $\sqrt{(-1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$,又 $|DP|=\sqrt{(-1-3)^2+(2+1)^2}=5$,所以点 B 到点 $P(3,-1)$ 距离的最大值为 $5+\sqrt{10}$,故选 C.

8. D 【解析】由条件知 $b=\dfrac{2}{9}$,$c=\ln\dfrac{9}{7}$,构造函数 $f(x)=x-\sin x$,$x\in(0,+\infty)$,求导得 $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,于是 $f(x)>f(0)=0$,所以 $a=\sin\dfrac{\pi}{15}<\dfrac{\pi}{15}<\dfrac{2}{9}=b$;构造函数 $g(x)=\ln x-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$,$(x>0)$,求导得 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$,所以函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)\geqslant g(1)=0$,于是 $\ln\dfrac{9}{7}>1-\dfrac{1}{\frac{9}{7}}=\dfrac{2}{9}$,得到 $b<c$,故选 D.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 全部选对得 5 分,部分选对得 2 分,有选错得 0 分.

9－12 ACD　　BD　　ACD　　ABD

9. ACD 【解析】令 $x-1=t$,则 $x=t+1$,于是可得 $(m+1+t)(1+t)^5=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_6t^6$,

令 $t=1$,则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=32(m+2)$,①

令 $t=-1$,则 $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6=0$,②

①－②,得 $2(a_1+a_3+a_5)=32(m+2)=2\times 64=128$,解得 $m=2$,A 正确;

①＋②,得 $2(a_0+a_2+a_4+a_6)=32(m+2)=128$,所以 $a_0+a_2+a_4+a_6=64$,B 错误;

又 $a_4=3C_5^4+C_5^3=25$,C 正确;经计算 $a_3=40>a_4$,D 正确. 故选 ACD.

10. BD 【解析】设 $\log_{\sqrt{2}}a=\log_2 b=\log_{2\sqrt{2}}(8a+2b)=k$，则 $a=(\sqrt{2})^k=2^{\frac{1}{2}k}$，$b=2^k$，$8a+2b=(2\sqrt{2})^k=2^{\frac{3}{2}k}$，于是 $8\times 2^{\frac{1}{2}k}+2\times 2^k=2^{\frac{3}{2}k}$，解得 $k=4$，$a=4$，$b=16$，于是 A 错误，B 正确；因 $a_3^2=a_2\cdot a_4=64$，所以 $a_3=\pm 8$，C 错误；由条件知等比数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是首项为 4，公比为 4 的等比数列，于是 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{4(1-4^n)}{1-4}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-4)$，故 D 正确. 故选 BD.

11. ACD 【解析】由条件知 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{5}$，双曲线离心率大小为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，A 正确；设渐近线 $y=\frac{1}{2}x$ 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，于是 $\cos\angle AOB=\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3}{5}$，B 错误；设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}-y_0^2=1$，不妨设 PA：$y-y_0=-\frac{1}{2}(x-x_0)$，联立 $\begin{cases}y-y_0=-\frac{1}{2}(x-x_0)\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases}$ 得 $A\left(\frac{1}{2}x_0+y_0,\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)$，同理可得 $B\left(\frac{1}{2}x_0-y_0,-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)$，于是 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2}x_0+y_0,\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x_0-y_0,-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)=\frac{1}{4}x_0^2-y_0^2-\left(\frac{1}{16}x_0^2-\frac{1}{4}y_0^2\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，C 正确；由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}$ 得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle AOB=\frac{3}{5}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|=\frac{3}{4}$，所以 $|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|=\frac{5}{4}$，又 $\sin\angle AOB=\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\frac{4}{5}$，所以四边形 $OAPB$ 的面积是 $|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\sin\angle AOB=\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}=1$，D 正确. 故选 ACD.

12. ABD 【解析】假设直线 EF 与直线 AP 共面，于是 E、F、A、P 四点共面，则直线 AE 与直线 PF 共面，与直线 AE、直线 PF 互为异面直线矛盾，所以直线 EF 与直线 AP 互为异面直线，A 正确；当 $CF=\frac{1}{4}CP$ 时，EF∥平面 PAD，事实上，过点 F 作 FG∥PD 交 CD 于点 G，连 EG，则 EG∥AD，又 $EG\cap FG=G$，则平面 EFG∥平面 PAD，于是存在点 F，使 EF∥平面 PAD，B 正确；以点 D 为原点，以 DA，DC，DP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，则 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，设 $F(0,t,2-t)(0<t<2)$，于是 $\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},t-\frac{3}{2},2-t\right)$，平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，

设直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成角为 α，

所以 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\vec{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{2-t}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+(2-t)^2}}=\frac{2-t}{\sqrt{2t^2-7t+7}}$，

令 $2-t=\mu$，则 $0<\mu<2$，于是 $\sin\alpha=\frac{\mu}{\sqrt{2\mu^2-\mu+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu}+2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}}<\sqrt{\frac{4}{7}}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，因此不存在点 F，使得 EF 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，C 错误；

$\vec{DA}=(\sqrt{3},0,0)$，设直线 EF 与直线 AD 所成角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{EF},\vec{DA}\rangle|=\dfrac{|\vec{EF}\cdot\vec{DA}|}{|\vec{EF}|\cdot|\vec{DA}|}=$

$$\frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+(2-t)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2t^2-7t+7}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\left(t-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}}\leqslant\frac{\sqrt{42}}{7}$$，所以直线 EF 与直线 AD 所成角的余弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$，D 正确. 故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(2,0)$　　14. 4　　15. 48π　　16. $\left(-\frac{17}{2},-5\right]\cup\left[1,\frac{13}{2}\right)$

13. $(2,0)$

【解析】根据条件知 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量的坐标为 $2\vec{a}=(2,0)$.

14. 4

【解析】由条件知 $p=2$，抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，根据以线段 AF 为直径的圆与 y 轴切于点 $G(0,2)$ 得 $A(4,4)$，于是 $|AF|=4+1=5$，根据 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$ 知 $|BF|=\frac{5}{4}$，所以 $\lambda=\frac{|\vec{AF}|}{|\vec{FB}|}=4$.

15. 48π

【解析】由已知得到 $\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的直角三角形，因为 $PA=PB=PC=2\sqrt{3}$，所以点 P 在平面 ABC 内的射影是 $\triangle ABC$ 的外心，即斜边 AB 的中点，且平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，于是 $\triangle PAB$ 的外心即为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心，因此 $\triangle PAB$ 的外接圆半径等于三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径. 因为 $PA=PB=2\sqrt{3}$，$AB=6$，所以 $\cos\angle APB=\frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB}=\frac{12+12-36}{2\times12}=-\frac{1}{2}$，

于是 $\sin\angle APB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，根据正弦定理知 $\triangle PAB$ 的外接圆半径 R 满足 $2R=\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径大小为 $R=2\sqrt{3}$，因此三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=48\pi$.

16. $\left(-\frac{17}{2},-5\right]\cup\left[1,\frac{13}{2}\right)$

【解析】由条件知 $2\sin\varphi=\sqrt{3}$，于是 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，当 $\omega>0$ 时，因 $0<x\leqslant\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}<\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}$，要满足条件，则 $\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{2}$，解得 $1\leqslant\omega<\frac{13}{2}$；当 $\omega<0$ 时，因 $0<x\leqslant\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$，要满足条件，则 $-\frac{5\pi}{2}<\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant-\frac{4\pi}{3}$，解得 $-\frac{17}{2}<\omega\leqslant-5$，综上，实数 ω 的取值范围是 $\left(-\frac{17}{2},-5\right]\cup\left[1,\frac{13}{2}\right)$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.

17.(本题满分 10 分)

解:(1)由条件 $a_{n+1}=2a_n-2n+1$,

可得 $a_{n+1}-2(n+1)-1=2(a_n-2n-1)$, …… 2 分

因 $a_1-2\times1-1=a_1-3=0$,所以数列 $\{a_n-2n-1\}$ 不是等比数列, …… 3 分

于是 $a_n-2n-1=0$,所以数列 $\{a_n\}$ 通项公式 $a_n=2n+1$. …… 4 分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{2n+1}{2^n}$, …… 5 分

于是 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n}$ …… 6 分

则 $\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$, …… 7 分

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}+2\times\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n+1}{2^{n+1}}=\frac{5}{2}-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$, …… 9 分

所以 $T_n=5-\frac{2n+5}{2^n}<5$,

于是 $T_n<5$,原不等式得证. …… 10 分

18.(本题满分 12 分)

解:(1)由正弦定理可得 $a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}bc$, …… 2 分

根据余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-\sqrt{3}bc}{2bc}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, …… 4 分

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{5\pi}{6}$. …… 5 分

(2)因为 $b=2\sqrt{3}$,$c=2$,又 $a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}bc$,解得 $a=2\sqrt{7}$, …… 6 分

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{28+4-12}{2\times2\times2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$,

于是 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{7}}{14}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{14}$, …… 7 分

因为 $\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\sin\angle BAD=\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\frac{3\sqrt{21}}{14}$, …… 8 分

在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$,

所以 $BD=\frac{c\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\frac{2\times\frac{3\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6\sqrt{7}}{7}$, …… 10 分

于是 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times AB\times BD\times\sin B=\frac{1}{2}\times2\times\frac{6\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{7}$,

所以 $\triangle ABD$ 的面积大小为 $\frac{3\sqrt{3}}{7}$. …… 12 分

19.（本题满分 12 分）

解：(1) 由条件知甲同学通过测试的概率为 $C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$；…… 2 分

(2) 由(1)可知甲同学没有通过测试的概率为 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，…… 3 分

根据题意乙同学通过测试的概率为 $C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+C_3^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$，

所以乙同学没有通过测试的概率为 $1-\frac{20}{27}=\frac{7}{27}$，…… 4 分

由已知得 $X=0,20,40$，

因 $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{27}=\frac{10}{27}$，

$P(X=20)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{27}+\frac{1}{2}\times\frac{20}{27}=\frac{1}{2}$，

$P(X=40)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{27}=\frac{7}{54}$，

于是

X	0	20	40
P	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{54}$

…… 6 分

所以 $E(X)=0\times\frac{10}{27}+20\times\frac{1}{2}+40\times\frac{7}{54}=\frac{410}{27}$. …… 7 分

(3) 由题意知甲投中 1 次，其搭档投中 2 次的概率为 $C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times p^2=\frac{3}{8}p^2$；…… 8 分

甲投中 2 次，其搭档至少投中 1 次的概率为 $C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}\times[C_2^1p(1-p)+p^2]=\frac{3}{8}(2p-p^2)$；…… 9 分

甲投中 3 次，其搭档投中与否的概率为 $C_3^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，…… 10 分

所以甲同学通过测试的概率为 $\frac{3}{8}p^2+\frac{3}{8}(2p-p^2)+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}p+\frac{1}{8}$，

根据题意可知 $\frac{3}{4}p+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}$，则 $p>\frac{1}{2}$，…… 11 分

又 $p\in(0,1)$，所以当 $p\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，可以提高甲同学通过测试的概率. …… 12 分

20.（本题满分 12 分）

解：(1) 证明：连 B_1D_1 交 A_1C_1 于 O_1，连 DO_1.

在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1=DD_1$ 且 $BB_1/\!/DD_1$，

所以四边形 BDD_1B_1 是平行四边形，$BD=B_1D_1$ 且 $BD/\!/B_1D_1$，

又 O,O_1 分别为 BD,B_1D_1 的中点，所以 $OD=O_1B_1$，$OD/\!/O_1B_1$，

所以四边形 ODO_1B_1 是平行四边形，于是 $OB_1/\!/O_1D$，…… 2 分

因为平面 $ACP/\!/$平面 A_1C_1D，平面 $ACP\cap$平面 $BDD_1B_1=OP$，

平面 $A_1C_1D\cap$ 平面 $BDD_1B_1=O_1D$,

所以 $OP/\!/O_1D$ …………………………………………………………………… 4 分

因为 OB_1,OP 都经过点 O,所以 O,P,B_1 三点共线. …………………………………… 5 分

(2)解:由(1)可知 $\frac{BP}{PD_1}=\frac{OB}{B_1D_1}=\frac{1}{2}$,所以 $BP=\frac{1}{3}BD_1$.

作 $A_1Q\perp$ 平面 $ABCD$ 于 Q,$A_1E\perp AB$ 于 E,$A_1F\perp AD$ 于 F,连 EQ,FQ,AQ,

则 $A_1Q\perp AB,A_1Q\perp AD$,由 $\angle BAA_1=\angle DAA_1=\frac{\pi}{3}$,得 $AE=AF=\frac{3}{2}$,

又 $A_1Q\cap A_1E=A_1$,所以 $AB\perp$ 平面 A_1EQ,于是 $AB\perp EQ$,同理 $AD\perp FQ$,所以 $\triangle AEQ\cong\triangle AFQ$,$\angle EAQ=\angle FAQ=\frac{\pi}{6}$,所以点 Q 在 AC 上,且 $AQ=\sqrt{3}$,所以点 Q 与 O 重合,于是 $A_1Q=\sqrt{6}$. …………………… 7 分

以点 O 为原点,分别以 OA,OB,OA_1 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A_1(0,0,\sqrt{6}),A(\sqrt{3},0,0),B(0,1,0),D(0,-1,0)$,所以 $\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{6})=\overrightarrow{DD_1}$,于是

$D_1(-\sqrt{3},-1,\sqrt{6})$,又 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$,所以 $\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$,于是可得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-2y+\sqrt{6}z=0\\ -\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$,

不妨令 $x=2$,则 $\vec{m}=(2,2\sqrt{3},3\sqrt{2})$, …………………………………………………… 9 分

平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$, ………………………………………………… 10 分

$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{34}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$, ……………………………………………… 11 分

所以二面角 $P-AB-C$ 大小的余弦值为 $\frac{3\sqrt{17}}{17}$. ……………………………………………… 12 分

21.(本题满分 12 分)

(1)解:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

求导得 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x+a}{x^2}$, ……………………………………………………………… 1 分

当 $a\geqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增; ………………………………… 2 分

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,$x=-a$,于是当 $x\in(0,-a)$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减,

当 $x\in(-a,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… 3 分

综上,当 $a\geqslant 0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减,在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 4 分

(2)证明:令 $f(x)=0$,则 $x\ln x=a$,

令 $g(x)=x\ln x$,求导得 $g'(x)=\ln x+1$,

则函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增,$g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$,

当 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时,函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个不同的交点,且 $0<x_1<\frac{1}{e}<x_2<1$. ……… 6 分

要证 $\sqrt{1+4a}<x_2-x_1<1+a$,

只需证明 $0<x_1<\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}<x_2<1+a$ ………………………………………… 7 分

要证 $x_1<\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$,即证 $\sqrt{1+4a}<1-2x_1$,

两边同时平方,只需证明 $a<x_1^2-x_1$,

因为 x_1 是函数 $f(x)$ 的一个零点,所以 $\ln x_1-\frac{a}{x_1}=0$,即 $a=x_1\ln x_1$,

所以只需证明 $x_1\ln x_1<x_1^2-x_1$,即证 $\ln x_1<x_1-1$,①

构造函数 $h(x)=\ln x-(x-1)$,$x\in(0,1)$,求导得 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,

于是函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,所以 $h(x)<h(1)=0$,因此①式成立; ………………………… 9 分

同理可证 $x_2>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 成立.

要证 $x_2<1+a$,又 $a=x_2\ln x_2$,只需证明 $x_2<1+x_2\ln x_2$,即证 $1-\frac{1}{x_2}<\ln x_2$,②

构造函数 $\varphi(x)=\ln x-\left(1-\frac{1}{x}\right)$,$x\in(0,1)$,求导得 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,

于是函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,所以 $\varphi(x)>\varphi(1)=0$,因此②式成立.

因此原不等式成立. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

22.(本题满分 12 分)

解:(1)根据椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 知 $a=\sqrt{2}c$,$b=c$,在 $\triangle A_1BF$ 中,$\angle BFA_1=\frac{3\pi}{4}$,$|A_1B|=\sqrt{3}c$,由正弦定理

得 $\frac{|A_1B|}{\sin\angle BFA_1}=\frac{\sqrt{3}c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}c=2\times\sqrt{3}$, ………………………………………………………… 2 分

解得 $c=\sqrt{2}$,$a=2$,$b=\sqrt{2}$, ………………………………………………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)由条件知直线 l 的斜率不为 0,

设直线 $l:x=ty+m(t\neq0)$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}x=ty+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$,得 $(t^2+2)y^2+2mty+m^2-4=0$,

于是 $y_1+y_2=-\frac{2mt}{t^2+2}$,$y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+2}$,(*) …………………………………………………………… 6 分

因为 $A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1$,

所以 $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{y_1^2}{x_1^2-4}=\frac{2\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}{x_1^2-4}=-\frac{1}{2}$,

同理 $k_3k_4=-\frac{1}{2}$,于是 $k_1=-\frac{1}{2k_2}$,$k_4=-\frac{1}{2k_3}$,

因为 $k_1+k_4=\frac{5}{3}(k_2+k_3)$，所以 $-\frac{1}{2k_2}-\frac{1}{2k_3}=\frac{5}{3}(k_2+k_3)$，即 $-\frac{k_2+k_3}{2k_2k_3}=\frac{5}{3}(k_2+k_3)$

又直线 l 的斜率存在，所以 $k_2+k_3\neq 0$，于是 $k_2k_3=-\frac{3}{10}$，

所以 $\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=-\frac{3}{10}$，即 $10y_1y_2+3(x_1-2)(x_2-2)=0$， ………………………………………… 8 分

又 $x_1=ty_1+m, x_2=ty_2+m$，

所以 $10y_1y_2+3(ty_1+m-2)(ty_2+m-2)=0$，

整理得 $(3t^2+10)y_1y_2+3t(m-2)(y_1+y_2)+3(m-2)^2=0$，

将（＊）式代入上式，得 $(3t^2+10)\left(\frac{m^2-4}{t^2+2}\right)+3t(m-2)\left(-\frac{2mt}{t^2+2}\right)+3(m-2)^2=0$，

化简整理得 $(m-2)(2m+1)=0$，

又 P、Q 位于 x 轴的两侧，所以 $y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+2}<0$，解得 $-2<m<2$，

所以 $m=-\frac{1}{2}$，此时直线 l 与椭圆 C 有两个不同的交点，于是直线 l 恒过定点 $D\left(-\frac{1}{2},0\right)$. ……… 10 分

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$y_1+y_2=\frac{t}{t^2+2}$，$y_1y_2=-\frac{15}{4(t^2+2)}$，

$\triangle A_2PQ$ 的面积 $S_{\triangle A_2PQ}=\frac{1}{2}|A_2D|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\frac{5}{4}\sqrt{\left(\frac{t}{t^2+2}\right)^2-4\left[-\frac{15}{4(t^2+2)}\right]}=\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{16t^2+30}}{t^2+2}$， ……………………………………………………… 11 分

令 $\sqrt{16t^2+30}=\lambda$，因为直线 l 的斜率存在，则 $\lambda>\sqrt{30}$，$t^2=\frac{\lambda^2-30}{16}$，

于是 $S_{\triangle A_2PQ}=\frac{5}{4}\cdot\frac{16\lambda}{\lambda^2+2}=\frac{20}{\lambda+\frac{2}{\lambda}}$，

又函数 $y=\frac{20}{\lambda+\frac{2}{\lambda}}$ 在 $(\sqrt{30},+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\triangle A_2PQ$ 面积的取值范围为 $\left(0,\frac{5}{8}\sqrt{30}\right)$. …………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。