

## 2019~2020 学年度高三年级八调考试 数学试卷（文）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。

### 第 I 卷（选择题 共 60 分）

注意事项：

1. 答卷 I 前，考生将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 答卷 I 时，每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。

一、 选择题（每小题5分，共60分。下列每小题所给选项只有一项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上）

1. 设全集为  $\mathbf{R}$ ，集合  $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$ ，集合  $B = \{x | |x| < 1\}$ ，则  $A \cap B =$ 

A. $(-1, 1)$	B. $(-1, 2)$
C. $(0, 1)$	D. $(0, 2)$
2. 已知复数  $z = i^{2020} \cdot (1+i)$ ，则  $z$  的模  $|z| =$ 

A. 1	B. $\sqrt{2}$
C. $\sqrt{3}$	D. 4
3. 在 2019 年的国庆假期中，重庆再次展现“网红城市”的魅力，吸引了 3000 多万人次的客流。北京游客小李慕名而来，第一天打算游览“洪崖洞”，“解放碑”，“朝天门”。如果随机安排三个景点的游览顺序，则最后游览“朝天门”的概率为

A. $\frac{1}{6}$	B. $\frac{5}{6}$
C. $\frac{1}{3}$	D. $\frac{2}{3}$
4. 已知非零向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  满足： $\vec{a} = (1, 1)$ ， $|\vec{b}| = 1$ ， $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  的夹角大小为

A. $\frac{\pi}{6}$	B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{3}$	D. $\frac{\pi}{2}$

5. 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1, 其内切球与外接球的表面积分别为  $S_1, S_2$ , 则  $\frac{S_1}{S_2} =$

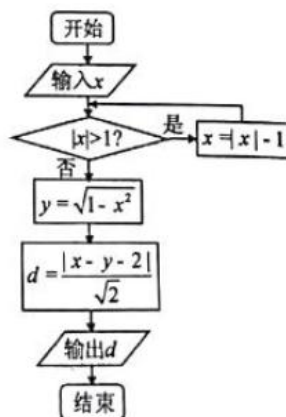
- A. 1 B.  $\frac{1}{2}$   
 C.  $\frac{1}{3}$  D.  $\frac{1}{4}$

6. 已知  $\tan\theta = -2$ , 则  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin\theta$  的值为

- A.  $\frac{2}{5}$  B.  $-\frac{2}{5}$   
 C.  $\frac{3}{5}$  D.  $\frac{4}{5}$

7. 如图所示的一个算法的程序框图, 则输出  $d$  的最大值为

- A.  $\sqrt{2}$  B. 2  
 B.  $1 + \sqrt{2}$  D.  $1 + 2\sqrt{2}$

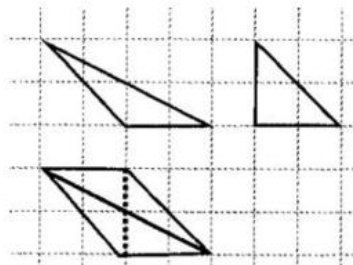


8. 已知  $f(x)$  是定义在  $[0, +\infty)$  的函数, 满足  $f(x+3) = -f(x)$ , 当  $x \in [0, 3)$  时,  $f(x) = 2^x$ , 则  $f(\log_2 192) =$

- A.  $\frac{1}{2}$  B.  $\frac{1}{3}$   
 C. 2 D. 3

9. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某三棱锥的三视图, 则该三棱锥的外接球的体积为

- A.  $\frac{11\sqrt{22}\pi}{3}$  B.  $\frac{44\sqrt{11}\pi}{3}$   
 C.  $44\sqrt{11}\pi$  D.  $11\sqrt{22}\pi$



10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} f(x-2), & x > 1, \\ |x| - 1, & -1 < x \leq 1, \end{cases}$  关于  $x$  的方程  $f(x) = \log_a(x+1)$  恰有 5 个解, 则  $a$  的取值范围为

- A.  $\frac{1}{7} < a < \frac{1}{5}$  B.  $\frac{1}{7} < a < \frac{1}{5}$   
 C.  $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$  D.  $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$

11. 已知抛物线  $x^2=4y$  的焦点为  $F$ , 过直线  $y=x-2$  上任一点引抛物线的两条切线, 切点为  $A, B$ , 则点  $F$  到直线  $AB$  的距离
- A. 无最小值  
B. 无最大值  
C. 有最小值, 最小值为 1  
D. 有最大值, 最大值为  $\sqrt{5}$
12. 已知函数  $f(x)=a(2a-1)e^{2x}-(3a-1)(x+2)e^x+(x+2)^2$  有 4 个不同的零点, 则实数  $a$  的取值范围为
- A.  $(\frac{1}{2}, e)$   
B.  $(\frac{1}{2}, \frac{e+1}{2})$   
C.  $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, e)$   
D.  $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{e+1}{2})$

## 第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22 题~第 24 题为选考题, 考生根据要求作答。

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分。

13. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-3y+4 \geq 0 \\ 3x-y-4 \leq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $2x-y$  的最小值是\_\_\_\_\_.

14. 对于三次函数  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a \neq 0)$ , 定义: 设  $f''(x)$  是  $f'(x)$  的导数, 若方程  $f''(x)=0$  有实数解  $x_0$ , 则称  $(x_0, f(x_0))$  为函数  $f(x)$  的拐点. 某同学经过探索发现任何一个三次函数都有“拐点”; 任何一个三次函数都有对称中心, 且“拐点”就是对称中心. 设函数

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{12}, \text{ 则 } g\left(\frac{1}{2021}\right) + g\left(\frac{2}{2021}\right) + \cdots + g\left(\frac{2020}{2021}\right) = \text{_____};$$

$$\sum_{i=1}^{2020} (-1)^{i-1} g'\left(\frac{i}{2021}\right) = \text{_____}. \text{ (第一空 2 分, 第二空 3 分)}$$

15. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点为  $F_1, F_2$ , 以  $F_1F_2$  为直径的圆与双曲线  $C$  的渐近线在第一象限交于点  $P$ , 线段  $PF_2$  与双曲线的交点  $M$  为  $PF_2$  的中点, 则双曲线  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.
16. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $na_n - (n-1)a_{n+1} = 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ,  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 当  $n \neq 5$  时, 都有  $S_n < S_5$ , 则  $S_5$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

三、解答题（共6个小题，共70分。解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是一个等差数列，且 $a_2=2$ ， $a_1+a_4=5$ ，数列 $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且满足： $b_1=$

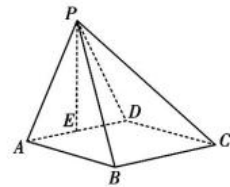
$$\frac{1}{2}, b_2 \cdot b_4 = \frac{1}{64}.$$

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；
- (2) 求证： $a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n < 2$ .

18.（本小题满分12分）

如图，已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PD=PA$ ， $E$ 点为 $AD$ 的中点， $PE \perp CD$ .

- (1) 求证：平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ；
- (2) 若正方形的边长为4，求 $D$ 点到平面 $PEC$ 的距离.



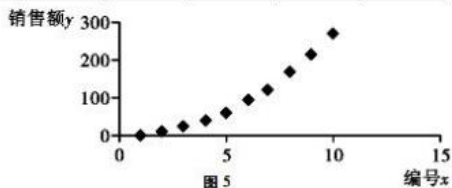
19. (本小题满分 12 分)

2019 年双十一落下帷幕, 天猫交易额定格在 268 (单位: 十亿元) 人民币 (下同), 再创新高, 比去年 218 (十亿元) 多了 50 (十亿元), 这些数字的背后, 除了是消费者买买买的表现, 更是购物车里中国新消费的奇迹, 为了研究历年销售额的变化趋势, 一机构统计了 2010 年到 2019 年天猫双十一的销售额数据  $y$  (单位: 十亿元), 绘制如下表 1:

表 1

年份	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
编号 $x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
销售额 $y$	0.9	8.7	22.4	41	65	94	132.5	172.5	218	268

根据以上数据绘制散点图, 如图 5 所示.



(1) 把销售额超过 100 (十亿元) 的年份叫 “畅销年”, 把销售额超过 200 (十亿元) 的年份叫 “狂欢年”, 从 2010 年到 2019 年这十年的 “畅销年” 中任取 2 个, 求至少取到一个 “狂欢年” 的概率;

(2) 根据散点图判断,  $y = a + bx$  与  $y = cx^2 + d$  哪一个适宜作为销售额  $y$  关于  $x$  的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由);

(3) 根据 (2) 的判断结果及下表中的数据, 建立  $y$  关于  $x$  的回归方程, 并预测 2020 年天猫双十一的销售额. (注: 数据保留小数点后一位)

参考数据:  $t_i = x_i^2$ ,

$\sum_{i=1}^{10} y_i = 1020$	$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 8088$	$\sum_{i=1}^{10} t_i = 385$	$\sum_{i=1}^{10} t_i^2 \approx 25380$	$\sum_{i=1}^{10} t_i y_i \approx 67770$	$(\bar{t})^2 \approx 1483$
------------------------------	----------------------------------	-----------------------------	---------------------------------------	---	----------------------------

参考公式:

对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归直线  $\hat{v} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u$  的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为  $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}$ ,  $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$ .

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点为  $F_1, F_2$ , 焦距为  $2\sqrt{2}$ , 直线  $l: y = x - 1$  与椭圆  $C$  相交于  $A, B$

两点,  $P(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$  为弦  $AB$  的中点.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $C$  相交于不同的两点  $M, N, Q(0, m)$ , 若  $\vec{OM} + \lambda \vec{ON} = 3\vec{OQ} (O$  为坐标原点), 求  $m$  的取值范围.

21. (本题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = e^x - ax$ .

(1) 若函数  $f(x)$  在  $x \in (\frac{1}{2}, 2)$  上有 2 个零点, 求实数  $a$  的取值范围. (注  $e^3 > 19$ )

(2) 设  $g(x) = f(x) - ax^2$ , 若函数  $g(x)$  恰有两个不同的极值点  $x_1, x_2$ , 证明:  $\frac{x_1 + x_2}{2} < \ln(2a)$ .

请考生在第 22、23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一部分，做答时请写清题号。

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C_1: \begin{cases} x=2+2\cos\theta, \\ y=2\sin\theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数)，以原点  $O$  为极点， $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线  $C_2: \rho^2=4\rho\sin\theta-3$ ，曲线  $C_1$  与曲线  $C_2$  相交于  $M, N$  两点。

(1) 求曲线  $C_2$  的直角坐标方程与直线  $MN$  的一般方程；

(2) 点  $P\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ ，求  $|PM|+|PN|$ 。

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

已知函数  $f(x) = |x-2| + |2x+2a|$ 。

(1) 若  $a=1$ ，求不等式  $f(x) \geq 4$  的解集；

(2) 证明：对任意  $x \in \mathbf{R}$ ， $2f(x) \geq |a+2| - |a|$ 。

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新  
高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 ( www.zizzs.com )

和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国

自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主选拔在线官方微信号：**zizzsw**。



自主招生  
: zizzsw

识别二维码，快速关注

 自主招生  
微信号: zizzsw

 自主招生在线  
微信号: zizzsw

 自主招生在线  
微信号: zizzsw