

文科数学

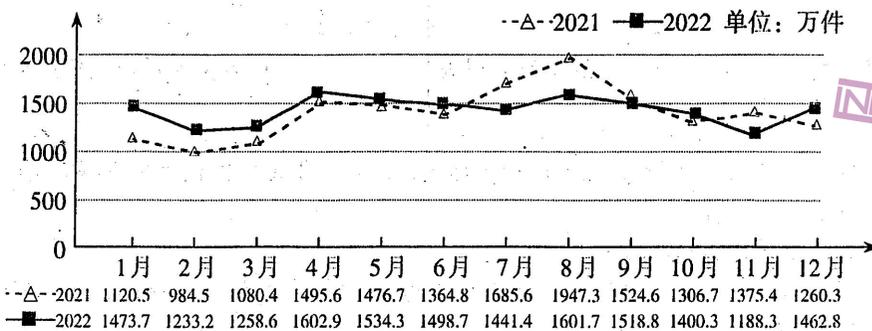
注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再涂选其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知复数  $z$  满足  $|\bar{z}| = 1$ , 且  $z + i$  是纯虚数, 则  $z =$   
 A.  $-i$       B.  $i$       C.  $\pm i$       D.  $\sqrt{2}i$
- 全集  $U = \{x | x \leq 9, x \in \mathbb{N}^*\}$ ,  $A = \{1, 3, 5, 6\}$ ,  $B = \{1, 3, 7, 9\}$ , 则  $B \cap \complement_U A =$   
 A.  $\{1, 3, 7, 9\}$       B.  $\{1, 7, 9\}$       C.  $\{3, 7, 9\}$       D.  $\{7, 9\}$
- 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \geq 3, \\ x - y \geq -1, \\ 2x - y \leq 3, \end{cases}$  则  $z = x - 2y$  的最小值是  
 A. 0      B. -3      C. -6      D. -9

4. 2022 年, 中央网信办举报中心受理网民举报违法和不良信息 1.72 亿件。下面是 2021 年、2022 年连续两年逐月全国网络违法和不良信息举报受理情况数据及统计图, 下面说法中错误的是



- 2022 年比 2021 年平均每月举报信息数量多
- 举报信息数量按月份比较, 8 月平均最多
- 两年从 2 月到 4 月举报信息数量都依次增多
- 2022 年比 2021 年举报信息数据的标准差大

5. 下述四个结论:

- 命题“若  $a = 0$ , 则  $ab = 0$ ”的否命题是“若  $a = 0$ , 则  $ab \neq 0$ ”;
- $x^2 - 5x - 6 = 0$  是  $x = -1$  的必要而不充分条件;
- 若命题“ $\neg p$ ”与命题“ $p$  或  $q$ ”都是真命题, 则命题  $q$  一定是真命题;
- 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \ln(x_0 + 1) \geq x_0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(x + 1) \leq x$ ”.

其中所有正确结论的序号是

- A. ①②      B. ②③      C. ④      D. ②③④

6. “春雨惊春清谷天, 夏满芒夏暑相连, 秋处露秋寒霜降, 冬雪雪冬小大寒, 每月两节不变更, 最多相差一两天。”中国农历的“二十四节气”, 凝结着中华民族的智慧, 是中国传统文化的结晶, 如五月有立夏、小满, 六月有芒种、夏至, 七月有小暑、大暑。现从五月、六月、七月这六个节气中任选两个节气, 则这两个节气恰在同一个月的概率为

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{5}$       D.  $\frac{1}{10}$

7. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且满足  $f(x + 1) = f(1 - x)$ , 当  $0 < x \leq 1$  时,  $f(x) = \ln x$ , 则  $f(2023) =$

- A. 0      B.  $\ln 3$       C. 1      D.  $\ln 2$

8. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1} - a_n} = 2n, a_1 = 1$ , 则  $a_{2023} =$

- A. 2023      B. 2024      C. 4045      D. 4047

9. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $M, N$  分别为  $AD, C_1D_1$  的中点, 过  $M, N, B_1$  三点的平面截正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  所得的截面形状为

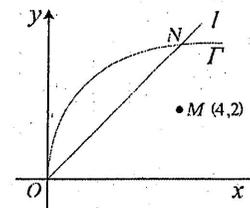
- A. 六边形      B. 五边形      C. 四边形      D. 三角形

10. 已知  $a = \sin 0.9, b = 0.9, c = e^{-0.1}, d = \cos 0.9$ , 则  $a, b, c, d$  的大小关系是

- A.  $a > b > c > d$       B.  $b > c > a > d$   
 C.  $c > b > a > d$       D.  $b > a > d > c$

11.  $P$  为抛物线  $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$  上任意一点,  $F$  为抛物线的焦点. 如图,  $M(4, 2)$ ,  $|PF| + |PM|$  的最小值为 5. 若直线  $l: y = x$  与抛物线  $\Gamma$  交于点  $N$ , 则  $\triangle OMN$  外接圆的面积为

- A.  $4\pi$       B.  $8\pi$   
 C.  $9\pi$       D.  $10\pi$



12. 若函数  $f(x) = 2\ln x - ax^2$  在  $[\sqrt{2}, e]$  上存在两个零点, 则  $a$  的取值范围是

- A.  $[\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e}]$       B.  $[\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e}]$       C.  $[\frac{2}{e^2}, \frac{\ln 2}{2}]$       D.  $[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}]$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。公众号:网课来了

13. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两条渐近线为  $l_1, l_2$ , 左焦点为  $F$ , 若点  $F$  关于直线  $l_1$  的对称点恰在直线  $l_2$  上, 则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_。
14. 已知向量  $e_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha), e_2 = (\cos\beta, \sin\beta), m = (0, 1)$ , 若  $e_1 + e_2 = m$ , 则  $e_1 \cdot e_2 =$ \_\_\_\_\_。
15. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n, \{b_n\}$  是等比数列且  $b_n > 0, c_n = a_n + b_n$ , 数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 若  $S_{14} = 7(a_{10} + 3), b_5 = b_2^4 = 16$ , 则  $T_9 =$ \_\_\_\_\_。
16. 已知正四棱锥  $P-ABCD$  的底面边长为  $2\sqrt{2}$ , 高为  $h$ , 且  $1 \leq h \leq 4$ , 该四棱锥的外接球的表面积为  $S$ , 则  $S$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题,考生根据要求作答。

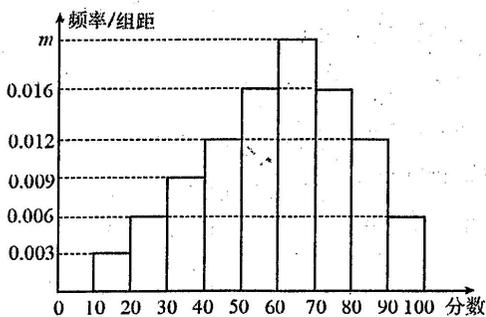
(一)必考题:共60分。

17. (12分)

4月15日是全国国家安全教育日。以人民安全为宗旨也是“总体国家安全观”的核心价值。只有人人参与,人人负责,国家安全才能真正获得巨大的人民性基础。作为知识群体的青年学生,是强国富民的中间力量,他们的国家安全意识取向对国家安全尤为重要。某校社团随机抽取了600名学生,发放调查问卷600份(答卷卷面满分100分)。回收有效答卷560份,其中男生答卷240份,女生答卷320份。有效答卷中75分及以上的男生答卷80份,女生答卷80份,其余答卷得分都在10分至74分之间。同时根据560份有效答卷的分数,绘制了如图所示的频率分布直方图。

(1)求频率分布直方图中  $m$  的值,并求出这560份有效答卷得分的中位数  $x$  和平均数  $n$  (同一组数据用该组中点值代替)。

(2)如果把75分及以上称为对国家安全知识高敏感人群,74分及以下称为低敏感人群,请根据上述数据,完成下面  $2 \times 2$  列联表,并判断能否有95%的把握认为学生性别与国家安全知识敏感度有关。



	高敏感	低敏感	总计
男生	80		
女生	80		
总计			560

附:独立性检验临界值表 公众号:网课来了

$P(K^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$K^2$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

公式:  $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a + b + c + d$ .

18. (12分)

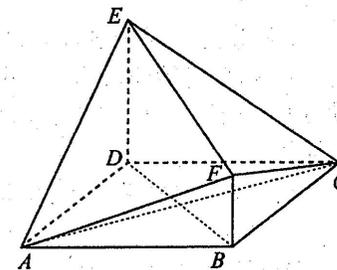
$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $c = 2(a \cos C - b), c^2 + a^2 = b^2 + \sqrt{3}ac, b = 2$ .

- (1)求  $A$ ;
- (2)若  $M$  是直线  $BC$  外一点,  $\angle BMC = \frac{\pi}{3}$ , 求  $\triangle BMC$  面积的最大值。

19. (12分)

如图, 四边形  $ABCD$  为菱形,  $ED \perp$  平面  $ABCD, FB \parallel ED, BD = \sqrt{2}ED = 2\sqrt{2}FB$ .

- (1)证明: 平面  $EAC \perp$  平面  $FAC$ ;
- (2)记三棱锥  $A-EFC$  的体积为  $V_1$ , 三棱锥  $A-BFC$  的体积为  $V_2$ , 求  $\frac{V_1}{V_2}$ .



20. (12分)

椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的短轴长为2, 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 过点  $P(3, 0)$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点。

- (1)求椭圆  $C$  的方程;
- (2)椭圆  $C$  上是否存在点  $Q$ , 使得直线  $MQ, NQ$  与直线  $x = 3$  分别交于点  $A, B$ , 且  $|PA| = |PB|$ ? 若存在, 求出点  $Q$  的坐标; 若不存在, 请说明理由。

21. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x \ln x, g(x) = \frac{x \ln x}{f(x)}$ .

- (1)求  $f(x)$  的单调区间;
- (2)若  $x_1 \neq x_2$ , 且  $g(x_1) = g(x_2)$ , 求证:  $x_1 x_2 < 1$ .

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分。

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t^2 + \frac{1}{t^2}, \\ y = t^2 - \frac{1}{t^2} \end{cases}$  ( $t$  为参数)。以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 点  $M$  的极坐标为  $(2, \pi)$ , 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = \frac{4}{\cos \theta}$ , 曲线  $C_1, C_2$  的交点为  $P_1, P_2$ .

- (1)求  $C_1$  和  $C_2$  的直角坐标方程;
- (2)圆  $C_3$  经过  $P_1, P_2, M$  三点, 过原点的两条直线  $l_1, l_2$  分别交圆  $C_3$  于  $A, B$  和  $C, D$  四点, 求证:  $|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|$ .

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数  $g(x) = |x - 1|$  的最小值为  $m, f(x) = g(x) + |x|$  的最小值为  $n$ . 实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = m, abc = n, a \neq b, c > 0$ .

- (1)求  $m$  和  $n$ ;
- (2)证明:  $a + b < -\sqrt[3]{4}$ .