2022届高三开年摸底联考 全国卷1

理科数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{y\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$

A.$[-2,2]$　　B.$[-2,0)$　　C.$[0,2]$　　D.$(0,2]$

2.已知复数 z 满足 $z(1+i)=2i$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{2}$　　C.1　　D.2

3.若 $0<a<1$，则"$\log_a x>\log_a y$"是"$a^x>a^y$"的．

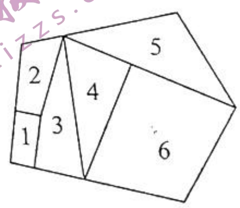
A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x-1),x>2,\\2^x-3,x\leqslant 2,\end{cases}$ 若 $f(m)=5$，则 $m=$

A.3　　B.4　　C.32　　D.33

5.公园中有一块如图所示的五边形荒地，公园管理部门计划在该荒地种植126棵观赏树，若1至6六个区域种植的观赏树棵数成等比数列，且前3个区域共种植14棵，则第5个区域种植的观赏树棵数为



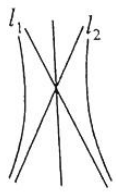
A.16　　B.28

C.32　　D.64

6.已知 $(1+2x^2)\left(1-\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为61，则 $a=$

A.± 2　　B.$\pm\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.2

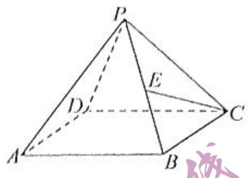
7.建在水资源不十分充足的地区的火电厂为了节约用水，需建造一个循环冷却水系统（冷却塔），以使水冷却可重复使用．右图是世界最高的电厂冷却塔——中国国家能源集团胜利电厂冷却塔，该冷却塔高225米，创造了"最高冷却塔"的吉尼斯世界纪录．该冷却塔的外形可看作双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面，如图：已知直线 l_1,l_2 为该双曲线的两条渐近线，l_1,l_2 向上的方向所成角的正切值为 $\frac{5}{12}$，则该双曲线的离心率为



A.$\sqrt{6}$　　B.5　　C.$\sqrt{26}$　　D.$2\sqrt{6}$

开年摸底联考 全国卷1 理科数学试卷 第1页（共4页）

8.如图,正四棱锥(底面为正方形,顶点在底面的射影为底面正方形的中心)$P-ABCD$ 中,$AB=4$,点 E 为 PB 中点,若 CE 与 PD 所成的角余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为



A.$\frac{32\sqrt{2}}{3}$　　B.$16\sqrt{2}$　　C.$\frac{32}{3}$　　D.$\frac{16}{3}$

9.已知 D,E 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的点,且 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BE}$,若 $\overrightarrow{CE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,则 $\frac{n}{m}$

A.-3　　B.3　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$-\frac{1}{3}$

10.将函数 $g(x)=\frac{1}{2^{|\omega-\varphi|}}A\sin\omega x(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象向左平移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位后得到函数 $y=f(x)$ 的图象,若 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,且 $f(-1)=f(3)=0$,则 ω 的可能取值为

A.$\frac{3}{2}$　　B.1　　C.$\frac{3\pi}{2}$　　D.π

11.已知直线 $l:y=2\sqrt{2}x-\sqrt{2}p$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 两点,点 A,B 在准线上的射影分别为点 A_1,B_1,若四边形 A_1ABB_1 的面积为 $27\sqrt{2}$,则 $p=$

A.2　　B.4　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

12.已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_2+a_4+a_6=285$,$na_n=(n-1)a_{n+1}+101(n\in\mathbf{N}^*)$,当数列 $\{a_na_{n+1}a_{n+2}\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和取得最大值时,n 的值为.

A.53　　B.49

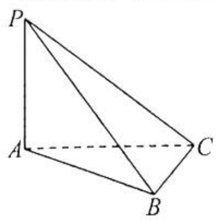
C.49 或 53　　D.49 或 51

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13.已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0,\\ y\leqslant 1,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 设 $z=x-2y$,则 z 最小值为________.

14.小明用某款手机性能测试 app 对 10 部不同品牌的手机的某项性能进行测试,所得的分数按从小到大的顺序(相等数据相邻排列)排列为:81,84,84,87,x,y,93,95,97,99,已知总体的中位数为 90,若要使该总体的标准差最小,则 $x-y=$________.

15.如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp$ 平面 ABC,$AB\perp BC$,$PA=AB=2$,若三棱锥的外接球体积为 $4\sqrt{3}\pi$,则异面直线 PB 与 AC 所成角为________.



16.已知函数 $f(x)=\sin^2x+2\cos x$ 的图象上存在点 $(x_0,f(x_0))$ 使得 $e^{f(x_0)}-a=f(x_0)$(e 为自然对数的底数),则实数 a 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）

在三角形 ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=2b$，且 $2c\sin B=a\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$.

（1）求角 C.

（2）E 为三角形 ABC 所在平面内的一点，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且 $|\overrightarrow{AE}|=2$，求线段 CE 的长.

18.（12 分）

在东京奥运会中，甲、乙、丙三名跳水运动员参加小组赛，已知甲晋级的概率为 $p(0<p<1)$，乙、丙晋级的概率均为 $q(0<q<1)$，且三人是否晋级相互对立.

（1）若甲晋级的概率与乙、丙两人均没有晋级的概率相等，与乙、丙两人有且仅有一人晋级的概率也相等，求 p,q；

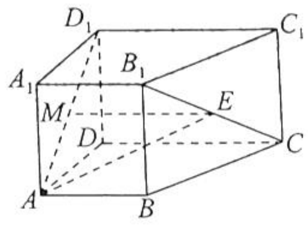
（2）若 $p=\frac{1}{2}$，记三个人中晋级的人数为 ξ，若 $\xi=0$ 时的概率和 $\xi=3$ 时的概率相等，求 $E(\xi)$.

19.（12 分）

如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 A_1ADD_1 为矩形，且平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AB/\!/CD$，$AB=AD=A_1A=\frac{1}{2}CD$，$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$，M、E 分别为 AD_1，B_1C 的中点.

（1）证明：$ME/\!/$平面 DCC_1D_1；

（2）求 AE 与平面 B_1BCC_1 所成的角的正弦值.



20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过左焦点和上顶点的直线 l 与圆 $(x-\sqrt{3})^2+y^2=3$ 相切.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 $m:y=kx+n(k>0,n>0)$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点，O 为坐标原点，且直线 OA，OB，AB 的斜率之和为 0.求三角形 OAB 面积的最大值.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=ae^{ax}+a(a>0)$，$g(x)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$.

(1)若 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与 $g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线互相平行，求实数 a 的值；

(2)若对 $\forall x>0$，$f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ (t 为参数，$0\leq\alpha<\pi$)．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程；

(2)点 $P(2,0)$，直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，若 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，求直线 l 的普通方程.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

已知 $f(x)=|a^2x+1|$，$g(x)=|2-\frac{2}{a}x|$.

(1)当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)-g(x)\geq -1$ 的解集；

(2)若 $a>0$，$f(1)\leq E$，$g(1)\leq F$，证明：$E+F\geq 2$.

2022 届高三开年摸底联考　全国卷 1

理科数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】$A=(0,+\infty)$，$B=[-2,2]$，所以 $A\cap B=(0,2]$.

2.B 【解析】$|z|=\frac{|2i|}{|1+i|}=\sqrt{2}$.

3.A 【解析】由 $0<a<1$，$\log_a x>\log_a y\Leftrightarrow y>x>0$，$a^x>a^y\Leftrightarrow y>x$，故为充分不必要条件.

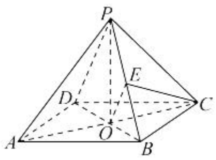
4.D 【解析】当 $x\leqslant 2$ 时，$2^x-3\leqslant 1$，故 $\log_2(m-1)=5$，解得 $m=33$.

5.C 【解析】由题 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=14$，$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=126$，所以 $\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=\frac{126}{14}=9$，解得 $q=2$，$a_1=2$，故 $a_5=2\times 2^4=32$.

6.B 【解析】$\left(1-\frac{a}{x}\right)^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=(-a)^r C_6^r x^{-r}$，所以当 $r=0$ 或 $r=2$ 时，$(1+2x^2)\left(1-\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为 $C_6^0+2(-a)^2C_6^2=61$，即 $1+30a^2=61$，解得 $a=\pm\sqrt{2}$.

7.C 【解析】设一条渐近线向上的方向与虚轴向上的方向所成的角为 α，则 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{5}{12}$，得 $\tan\alpha=\frac{1}{5}$ 或 $\tan\alpha=-5$(舍)，即 $\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$，故 $\frac{b}{a}=5$，所以 $e^2-1=25$，解得 $e=\sqrt{26}$.

8.A 【解析】如图，连接 AC，BD，设交点为 O，连接 PO，OE，则 $OE/\!/PD$，所以 $\angle CEO$ 或其补角即为 CE 与 PD 所成的角.



设 $PD=2x(x>\sqrt{2})$，则 $OE=x$，易知 $OE\perp OC$，$\cos\angle CEO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$CE^2=OE^2+OC^2=x^2+8$，故 $CE=\sqrt{x^2+8}$，所以 $\cos\angle CEO=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$，解得 $x=2$，

$PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=2\sqrt{2}$，所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 4\times 4\times 2\sqrt{2}=\frac{32\sqrt{2}}{3}$.

9.A 【解析】由题可知，D 为 BC 中点，E 为 AD 中点，所以 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，所以 $m=\frac{1}{4}$，$n=-\frac{3}{4}$，故 $\frac{n}{m}=-3$.

10.C 【解析】由题函数 $f(x)=\frac{1}{2^{|x|}}A\sin(\omega x+\varphi)$ 为偶函数，所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，故 $f(x)=\frac{1}{2^{|x|}}A\cos\omega x$，$f(-1)=\frac{1}{2^{\omega}}A\cos\omega=0$，所以 $\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$f(3)=\frac{1}{8^{\omega}}A\cos 3\omega=0$，所以 $3\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 ω 和 3ω 均为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，故 ω 的可能取值为 $\frac{3\pi}{2}$.

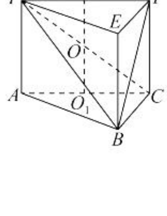
11.B 【解析】易知直线 l 过抛物线的焦点，联立方程可得 $4x^2-5px+p^2=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{5}{4}p$，$x_1x_2=\frac{1}{4}p^2$，又 A，B 到准线的距离分别为 $x_1+\frac{p}{2}$，$x_2+\frac{p}{2}$，所以 $|AB|=\frac{9}{4}p$，四边形 A_1ABB_1 为直角梯形，其高 $h=\frac{2\sqrt{2}}{3}|AB|=\frac{3\sqrt{2}}{2}p$，所以 $S=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)\times h=\frac{27\sqrt{2}}{16}p^2=27\sqrt{2}$，故 $p=4$.

12.D 【解析】易得 $a_1=101$，因为 $na_n=(n-1)a_{n+1}-101$，所以 $(n+1)a_{n+1}=na_{n+2}+101$，作差得 $(n+1)a_{n+1}-na_n=na_{n+2}-(n-1)a_{n+1}$，即 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=101$，$a_4=95$，故公差 $d=-2$，故 $a_n=103-2n$，所以 $a_{50}=3$，$a_{51}=1$，$a_{52}=-1$，$a_{53}=-3$，设 $b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，当 $n\leqslant 49$ 时，$b_n>0$，$b_{50}=-3$，$b_{51}=3$，当 $n\geqslant 52$ 时，$b_n<0$，所以当 $n=49$ 或 51 时，$\{a_na_{n+1}a_{n+2}\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和取得最大值.

13.-2 【解析】由可行域易知，当直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$ 过点 $(0,1)$ 时，z 取得最小值 -2.

14.0 【解析】因为总体的中位数为 90，所以 $x+y=180$，平均数为 90，要使该总体的标准差最小，即方差最小，即 $(x-90)^2+(y-90)^2$ 最小，又 $(x-90)^2+(y-90)^2\geqslant\frac{(x+y-180)^2}{2}=0$，当且仅当 $x-90=y-90$ 时，即 $x=y=90$ 时等号成立，故 $x-y=0$.

15.$\frac{\pi}{3}$ 【解析】如图，将三棱锥补成三棱柱，取 AC 中点 O_1，PF 中点 O_2，



外接球球心即为 O_1O_2 的中点 O，设外接球半径为 R，则 $\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，

得 $R=\sqrt{3}$，所以 $\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{4+BC^2}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，得 $BC=2$，由 $AC/\!/PF$，所以

$\angle BPF$或其补角即为异面直线所成的角，易得 $PB=BF=PF=2\sqrt{2}$，所以异面直线 PB 与 AC 所成角为$\frac{\pi}{3}$.

16.$[1,e^2-2]$ 【解析】$f(x)=\sin^2 x+2\cos x=-\cos^2 x+2\cos x+1=-(\cos x-1)^2+2$，由$-1\leqslant\cos x\leqslant1$得$-2\leqslant f(x)\leqslant2$，所以存在$-2\leqslant t\leqslant2$，使得 $e^t-a=t$ 成立，即 $a=e^t-t$ 成立，设 $g(t)=e^t-t$，

则 $g'(t)=e^t-1$，易知当$-2\leqslant t<0$时，$g'(t)<0$，$g(t)$单调递减，当$0<t\leqslant2$时，$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增，所以 $g(t)_{\min}=g(0)=1$，

又 $g(-2)=2-e^{-2}$，$g(2)=e^2-2$，$e^2-2>2-e^{-2}$，故 $1\leqslant a\leqslant e^2-2$，所以实数 a 的取值范围为$[1,e^2-2]$.

17.【解析】(1)因为 $a=2b$，由 $2c\sin B=a\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$得 $c\sin B=b\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，……1分

由正弦定理得 $\sin C\sin B=\sin B\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，……3分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq0$，

故 $\sin C=\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C$，

得$\frac{1}{2}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$，即 $\tan C=\sqrt{3}$，……5分

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.……6分

(2)由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4b^2+b^2-2b^2=3b^2$，

所以 $a^2=b^2+c^2$，故 $A=\frac{\pi}{2}$，……8分

所以四边形 $ABEC$ 为矩形，……10分

所以 $AE=BC=2b=2$，

所以 $CE=AB=\sqrt{3}b=\sqrt{3}$.……12分

18.【解析】(1)乙、丙两人均没有晋级的概率为$(1-q)^2$，

乙、丙两人有且仅有一人晋级的概率为 $C_2^1q(1-q)$，……2分

故$\begin{cases}p=(1-q)^2,\\p=C_2^1q(1-q),\end{cases}$

解得 $p=\frac{4}{9}$，$q=\frac{1}{3}$.……5分

(2)ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3.

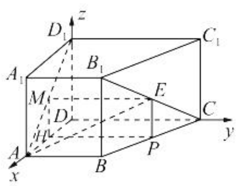
$P(\xi=0)=\frac{1}{2}(1-q)^2$，$P(\xi=3)=\frac{1}{2}q^2$，……7分

由题知$\frac{1}{2}(1-q)^2=\frac{1}{2}q^2$，解得 $q=\frac{1}{2}$，……8分

所以 $\xi\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，……10分

所以 $E(\xi)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.……12分

19.【解析】(1)证明：如图，分别取 AD 和 BC 的中点 H，P，连接 MH，HP，PE，……1分



则 $MH\parallel DD_1$，$MH=\frac{1}{2}DD_1$，$PE\parallel CC_1$，$PE=\frac{1}{2}CC_1$，

所以 $MH\parallel PE$，$MH=PE$，

所以四边形 $MHPE$ 为平行四边形，……3分

所以 $ME\parallel PH$，又 $PH\parallel CD$，所以 $ME\parallel CD$，

因为 $CD\subset$平面 DCC_1D_1，$ME\not\subset$平面 DCC_1D_1，

所以 $ME\parallel$平面 DCC_1D_1.……4分

(2)因为四边形 A_1ADD_1 为矩形，所以 $DD_1\perp AD$，

因为平面 $A_1ADD_1\perp$平面 $ABCD$，且平面 $A_1ADD_1\cap$平面 $ABCD=AD$，

所以 $D_1D\perp$平面 $ABCD$，故 $D_1D\perp CD$，

因为 $AB\parallel CD$，$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$，所以 $CD\perp AD$，……6分

以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

设 $AB=1$，则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(1,1,1)$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，…… 8 分

设平面 B_1BCC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}z=0,\\-x+y=0,\end{cases}$ 不妨令 $x=1$，则 $y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$，…… 10 分

又 $\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\cos<\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}>=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{11}}{2}}=\dfrac{\sqrt{22}}{11}$，…… 11 分

所以 AE 与平面 B_1BCC_1 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$. …… 12 分

20.【解析】(1)设椭圆的半焦距为 c，则 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$……①. …… 1 分

直线 l：$y=\dfrac{b}{c}x+b$，则 $\dfrac{|\sqrt{3}b+bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\sqrt{3}$，即 $\dfrac{|\sqrt{3}b+bc|}{a}=\sqrt{3}$……② …… 3 分

又 $a^2=b^2+c^2$……③

由①②③解得 $a^2=4$，$b^2=1$，

所以求椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …… 5 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+n,\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $(1+4k^2)x^2+8knx+4n^2-4=0$，

所以 $\Delta=64k^2n^2-4(1+4k^2)(4n^2-4)>0$，得 $k^2>\dfrac{n^2-1}{4}$

$x_1+x_2=-\dfrac{8kn}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4n^2-4}{1+4k^2}$. …… 7 分

设直线 OA，OB 的斜率分别为 k_1，k_2，则 $k_1+k+k_2=0$，

即 $\dfrac{y_1}{x_1}+k+\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{kx_1+n}{x_1}+\dfrac{kx_2+n}{x_2}+k=3k+\dfrac{n(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{k(n^2-3)}{n^2-1}=0$，

所以 $n^2=3$，

又 $n>0$，所以 $n=\sqrt{3}$，…… 9 分

所以 $k^2>\dfrac{n^2-1}{4}=\dfrac{1}{2}$

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{(1+k^2)(4k^2-2)}}{1+4k^2}$，

原点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|n|}{\sqrt{1-k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4k^2-2}}{1+4k^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4k^2-2}+\frac{3}{\sqrt{4k^2-2}}}\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{\sqrt{4k^2-2}\cdot\frac{3}{\sqrt{4k^2-2}}}}=1$，…… 11 分

当且仅当 $\sqrt{4k^2-2}=\dfrac{3}{\sqrt{4k^2-2}}$ 时，即 $k^2=\dfrac{5}{4}$ 时等号成立，

所以三角形 OAB 面积的最大值为 1. …… 12 分

21.【解析】(1)$f'(x)=a^2e^{ax}$，所以 $f'(0)=a^2$， …… 1 分

$g'(x)=2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x+\dfrac{2}{x^2}+2$，所以 $g'(1)=4$，…… 2 分

由题，$a^2=4$，又 $a>0$，所以 $a=2$. …… 4 分

(2)由 $f(x)\geqslant g(x)$ 得：$a(e^{ax}+1)\geqslant2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$，即 $ax(e^{ax}+1)\geqslant(x^2+1)\ln x^2$，

即 $(e^{ax}+1)\ln e^{ax}\geqslant(x^2+1)\ln x^2$，…… 5 分

设 $h(x)=(x+1)\ln x$，

则 $h(e^{ax})=(e^{ax}+1)\ln e^{ax}$，$h(x^2)=(x^2+1)\ln x^2$，…… 6 分

$h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，设 $m(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，……

$m'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，所以当 $0<x<1$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，

所以 $m(x)_{\min}=h'(x)_{\min}=h'(1)=2>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $e^{ax}\geqslant x^2$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，…… 1

即 $a\geqslant\frac{2\ln x}{x}$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，

设 $n(x)=\frac{2\ln x}{x}$，则 $n'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$，

易知当 $0<x<e$ 时，$n'(x)>0$，$n(x)$ 单调递增，当 $x>e$ 时，$n'(x)<0$，$n(x)$ 单调递减，

$n(x)_{\max}=n(e)=\frac{2}{e}$，故 $a\geqslant\frac{2}{e}$，

所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$.…… 1

四、选做题

22.【解析】(1)由 $\rho=4\cos\theta-2\sin\theta$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$，……

即 $x^2+y^2=4x+2y$，

即 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.……

(2)将 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ (t 为参数，$0\leqslant\alpha<\pi$)代入 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，

整理得 $t^2-2t\sin\alpha-4=0$，

设 A，B 所对应的参数分别为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=2\sin\alpha$，$t_1t_2=-4$，……

所以 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|PA|+|PB|}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{4}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{4}=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+4}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

因为 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，……

故直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数)或 $\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数)，

所以直线 l 的普通方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$.…… 1

23.【解析】(1)由题，当 $a=1$ 时，$f(x)-g(x)\geqslant-1\Leftrightarrow|x+1|-|2-2x|\geqslant-1$，……

$\Rightarrow\begin{cases}x-2\geqslant0,\\ x\leqslant-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3x\geqslant0,\\ -1<x<1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-x+4\geqslant0,\\ x\geqslant1,\end{cases}$ ……

解得 $0\leqslant x\leqslant4$，

所以不等式的解集为 $[0,4]$.……

(2)证明：$E+F\geqslant f(1)+g(1)=|a^2+1|+|2-\frac{2}{a}|$ ……

$\geqslant|(a^2+1)-\left(2-\frac{2}{a}\right)|=|a^2+\frac{2}{a}-1|$(当且仅当 $2-\frac{2}{a}\leqslant0$ 时，即 $0<a\leqslant1$ 时等号成立) ……

$=|a^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-1|$

$\geqslant|3\sqrt[3]{a^2\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}}-1|=2$(当且仅当 $a^2=\frac{1}{a}$ 时，即 $a=1$ 时等号成立).…… 1

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。