2022年广州市普通高中毕业班综合测试（二）

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	D	B	C	B	D

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

9. BCD　　10. AD　　11. AC　　12. ABD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. $\frac{1}{2}$　　14. $\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{6}=1$　　15. 9　　16. $\frac{\sqrt{3}}{12}$，5π

说明：第(14)题答案可以为：$\frac{y^2}{4b^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\left(b^2>5\right)$．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）

解：若选条件①．

由于 $a_1=S_1=1>0$，$a_{n+1}\geq 1+a_n$，得 $a_n>0$． ……………………1分

由 $a_{n+1}=2\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)$，得 $S_{n+1}-S_n=2\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)$， ……………………2分

得 $\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)\left(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\right)=2\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)$， ……………………3分

因为 $\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\neq 0$，

所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=2$， ……………………4分

所以数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 是首项为 $\sqrt{S_1}=1$，公差为2的等差数列． ……………………5分

所以 $\sqrt{S_n}=1+2(n-1)=2n-1$．

1

所以 $S_n=(2n-1)^2$． ……………………………………6 分

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)^2-(2n-3)^2=8n-8$， ……………………7 分

由于 $a_1=1$ 不满足上式，

所以 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 8n-8, & n\geq 2.\end{cases}$ ……………………………………8 分

因为 $a_2=8$，$1+a_1=2$，满足 $a_2\geq 1+a_1$．

当 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}-(1+a_n)=7>0$，满足 $a_{n+1}\geq 1+a_n$． 缺验证扣1分………9 分

所以选择①时问题中的数列 $\{a_n\}$ 存在，此时 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 8n-8, & n\geq 2.\end{cases}$ ………………10 分

若选条件②．

由于 $a_n=S_{n-1}+n(n\geq 2)$，得 $a_2=S_1+2=3$． ……………………1 分

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_{n-1}+n$，$a_{n+1}=S_n+n+1$， ……………………2 分

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}+1=a_n+1$， ……………………3 分

得 $a_{n+1}=2a_n+1$， ……………………4 分

得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)(n\geq 2)$． ……………………5 分

由于 $a_2+1=4=2(a_1+1)$， ……………………6 分

则数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 $a_1+1=2$，公比为 2 的等比数列． ……………………7 分

故 $a_n+1=2\times 2^{n-1}$，即 $a_n=2^n-1$． ……………………8 分

因为 $a_{n+1}-(1+a_n)=(2^{n+1}-1)-(1+2^n-1)=2^n-1>0$， 缺验证扣1分………9 分

所以 $a_{n+1}>1+a_n$，符合题意．

所以选择②时问题中的数列 $\{a_n\}$ 存在，此时 $a_n=2^n-1$． ……………………10 分

若选条件③．

$a_1=S_1=1$． ……………………1 分

因为 $a_{n+1}=2a_n+n-1$，得 $a_{n+1}+(n+1)=2(a_n+n)$， ……………………3 分

由于 $a_1+1=2\neq 0$，则 $a_n+n\neq 0$． ……………………4 分

则 $\dfrac{a_{n+1}+(n+1)}{a_n+n}=2$. ……………………5 分

所以 $\{a_n+n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列. ……………………6 分

所以 $a_n+n=2^n$，即 $a_n=2^n-n$. ……………………7 分

因为 $a_{n+1}-(1+a_n)=2^{n+1}-(n+1)-(1+2^n-n)=2^n-2\geq 0$, ……………………8 分

满足 $a_{n+1}\geq 1+a_n$. 缺验证扣1分………9 分

所以选择③时问题中的数列 $\{a_n\}$ 存在，此时 $a_n=2^n-n$. ……………………10 分

18. （12 分）

（1）解：根据题意，这 60 名学生中耐力跑测试成绩等级为优或良的人数为 $7+11=18$，……………………1 分

成绩等级为合格或不合格的人数为 42. ……………………2 分

则 $P(X=1)=\dfrac{C_{18}^1C_{42}^1}{C_{60}^2}=\dfrac{126}{295}$. ……………………4 分

（2）解法 1：从该校的学生中随机抽取 3 名，相当于进行了 3 次独立重复试验，设所抽取的 3 名学生中耐力跑成绩为优或良的人数为 ξ，则 ξ 服从二项分布 $B(3,p)$. ………5 分

由题意得任取 1 名学生耐力跑成绩为优或良的频率为 $\dfrac{7+11}{60}=0.3$， ……………6 分

将样本频率视为概率得 $p=0.3$. ……………………7 分

根据二项分布的均值公式得 $E\xi=3p=0.9$. 有期望=3P给1分 ………9 分

根据题意得 $Y=100\xi$， ……………………10 分

所以 Y 的数学期望为 $EY=100E\xi=90$. 有第一个等式给1分……………………12 分

解法 2：从该校的学生中随机抽取 3 名，相当于进行了 3 次独立重复试验，设所抽取的 3 名学生中耐力跑成绩为优或良的人数为 ξ，则 ξ 服从二项分布 $B(3,p)$. ………5 分

由题意得任取 1 名学生耐力跑成绩为优或良的频率为 $\dfrac{7+11}{60}=0.3$， ……………6 分

将样本频率视为概率得 $p=0.3$. ……………………7 分

而 $Y=100\xi$，则 Y 的所有可能取值为 0，100，200，300. ……………………8 分

且 $P(Y=0)=C_3^0\times0.3^0\times0.7^3=0.343$， $P(Y=100)=C_3^1\times0.3^1\times0.7^2=0.441$，

$P(Y=200)=C_3^2\times0.3^2\times0.7^1=0.189$， $P(Y=300)=C_3^3\times0.3^3\times0.7^0=0.027$.

3

…………………………………………………………10 分

所以 Y 的分布列为：

Y	0	100	200	300
P	0.343	0.441	0.189	0.027

P的值错一个或两个扣1分……11 分

所以 Y 的数学期望为 $EY=0\times0.343+100\times0.441+200\times0.189+300\times0.027=90$.

…………………………………………………………12 分

19. （12 分）

（1）解：在△ACD 中，$\angle D=60^\circ$，$AC=6$，$CD=3\sqrt{3}$，

由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\sin\angle D$，　…………………………1 分

即 $36=AD^2+27-2\cdot AD\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$，

整理得 $AD^2-3\sqrt{3}AD-9=0$，　……………………………………2 分

解得 $AD=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2}$ 或 $AD=\dfrac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{2}$（舍去），　…………………………3 分

所以 $AD=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2}$.　……………………………………………4 分

所以△ACD 的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD\cdot\sin60^\circ=\dfrac{27\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{8}$.　只看结论……5 分

（2）解法 1：在△ACD 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle D}$，

得 $\sin\angle CAD=\frac{3}{4}$.　……………………………………6 分

因为 $\angle BAC=\angle A-\angle CAD=90^\circ-\angle CAD$，

则 $\sin\angle BAC=\cos\angle CAD=\sqrt{1-\sin^2\angle CAD}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，正弦值或余弦值有一个正确就给分……7 分

$\cos\angle BAC=\sin\angle CAD=\frac{3}{4}$.

因为 $\cos\angle ACB=\frac{9}{16}$，则 $\sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$.　只看结果…………8 分

因为 $\angle BAC+\angle ACB+\angle B=\pi$，

则 $\sin\angle B=\sin\left(\angle BAC+\angle ACB\right)=\sin\angle BAC\cos\angle ACB+\cos\angle BAC\sin\angle ACB$

$=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.　只看结果………………………9 分

在△ABC 中，由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin\angle B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，

得 $AB=5$，$BC=4$.　一个值1分………………11 分

所以 $AB+\frac{3}{4}BC=8$.　…………………………………………12 分

4

解法 2：在△ ACD 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle D}$，

得 $\sin\angle CAD=\dfrac{3}{4}$． ……………………………………6 分

因为 $\angle BAC=\angle A-\angle CAD=90^\circ-\angle CAD$，

则 $\cos\angle BAC=\cos\left(90^\circ-\angle CAD\right)=\sin\angle CAD=\dfrac{3}{4}$． 有正弦等于余弦给1分………8 分

在△ ABC 中，$\cos\angle ACB=\dfrac{9}{16}$，由余弦定理得

$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$，

$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

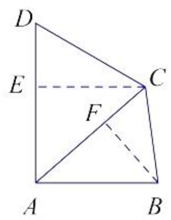
即 $AB^2=36+BC^2-\dfrac{27}{4}BC$， ① ……………………………………………9 分

$BC^2=AB^2+36-9AB$， ② ……………………………………………10 分

①＋②得 $AB+\dfrac{3}{4}BC=8$ ． ……………………………………………12 分

[另法]

（1）解：如图，作 $CE\perp AD$ 于 E，



在 Rt△ CED 中，$\angle D=60^\circ$，$CD=3\sqrt{3}$，

则 $CE=CD\cdot\sin60^\circ=3\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9}{2}$， ………………1 分

$DE=CD\cdot\cos60^\circ=3\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$． ………………2 分

在 Rt△ AEC 中，$AC=6$，则 $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$． ………………3 分

故 $AD=AE+DE=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2}$． ……………………………4 分

所以△ ACD 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot CE=\dfrac{27\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{8}$． ………………5 分

（2）解：在 Rt△ AEC 中，得 $\sin\angle CAE=\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{3}{4}$． ……………………………………6 分

因为 $\angle BAC=\angle A-\angle CAE=90^\circ-\angle CAE$，

则 $\cos\angle BAC=\cos\left(90^\circ-\angle CAE\right)=\sin\angle CAE=\dfrac{3}{4}$． 有正弦等于余弦给1分………8 分

在△ ABC 中，作 $BF\perp AC$ 于 F，则 $AC=AF+CF$， ……………………………9 分

得 $6=AB\cdot\cos\angle BAC+BC\cdot\cos\angle ACB$． ……………………………10 分

因为 $\cos\angle ACB=\dfrac{9}{16}$，

所以 $6=\dfrac{3}{4}AB+\dfrac{9}{16}BC$ 得 $AB+\dfrac{3}{4}BC=8$ ……………………一个等式1分…… 12 分

20.（12 分）

（1）证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$． ……………………………1 分

因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$，平面 $AEFC \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $AEFC \cap$ 平面 $ABCD = AC$，

所以 $BD \perp$ 平面 $AEFC$. ……………………………………………………2 分

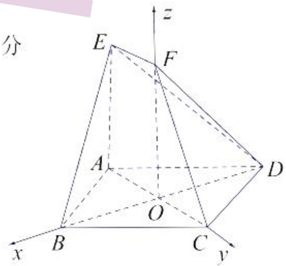
因为 $BD \subset$ 平面 BDE，所以平面 $BED \perp$ 平面 $AEFC$. ……………………………………3 分

（2）解法 1：设 $AC \cap BD = O$，连接 OF，

由 $BD \perp$ 平面 $AEFC$，$AE \subset$ 平面 $AEFC$，得 $AE \perp BD$. ……………………4 分

因为 $AE \perp AC$，$AC \subset$ 平面 $ABCD$，$BD \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AE \perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………5 分



因为 $EF \parallel AC$，$AO = \dfrac{1}{2}AC = EF$，

所以四边形 $AEFO$ 是平行四边形.

所以 $AE \parallel OF$.

所以 $OF \perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………6 分

以 OB，OC，OF 分别为 x，y，z 轴建立如图所示空间坐标系 $O-xyz$，

由于 $AE = AB = 2$，则 $B(\sqrt{3},0,0), C(0,1,0), D(-\sqrt{3},0,0), F(0,0,2)$，……………7 分

则 $\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{CF} = (0,-1,2)$，$\overrightarrow{BD} = \left(-2\sqrt{3},0,0\right)$. …………………8 分

设平面 CDF 的法向量为 $\boldsymbol{n} = \left(x,y,z\right)$，

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\sqrt{3}x - y = 0, \\ -y + 2z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$，解得 $\boldsymbol{n} = \left(1,-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，……9 分

由于 $BD \perp$ 平面 $AEFC$，则 $\overrightarrow{BD} = \left(-2\sqrt{3},0,0\right)$ 是平面 $AEFC$ 的法向量. …………10 分

则 $\cos < \boldsymbol{n}, \overrightarrow{BD} > = \dfrac{\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BD}|} = -\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$，……………………………………………11 分

所以二面角 $A-CF-D$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. ……………………………………………12 分

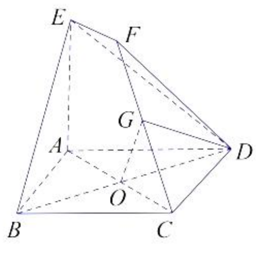
解法 2：过 O 作 $OG \perp FC$，垂足为 G，连接 DG，………4 分

由 $BD \perp$ 平面 $AEFC$，得 $OD \perp FC$，………………………5 分

又 $OD \cap OG = O$，$OD \subset$ 平面 DOG，$OG \subset$ 平面 DOG，

则 $FC \perp$ 平面 DOG. ………………………6 分

因为 $DG \subset$ 平面 DOG，则 $FC \perp DG$. ………………………7 分



故 $\angle DGO$ 为二面角 $A-CF-D$ 的平面角. ……………………………………………8 分

因为 $AE \perp AC$，$EF \parallel AC$，$AC = 2EF$，则平面四边形 $AEFC$ 为直角梯形.

在直角梯形 $AEFC$ 中，求得 $OG=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$， ……………………………………9 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle DOG$ 中，$DG=\sqrt{OG^2+OD^2}=\sqrt{\dfrac{19}{5}}$， ……………………………………10 分

$$\cos\angle DGO=\frac{OG}{DG}=\frac{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\dfrac{19}{5}}}=\frac{2\sqrt{19}}{19}.$$ ……………………………………11 分

所以二面角 $A-CF-D$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$． ……………………………………12 分

21．（12 分）

（1）解：由题意得 $2b=4$，$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………2 分

所以 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$． ……………………………………3 分

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$． ……………………………………4 分

（2）解法 1：由题意，直线 l_1 斜率存在且不为 0，设直线 l_1 的方程为 $y=k(x+3)$，

且 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$，

将 $y=k(x+3)$ 代入 $x^2+2y^2=8$，整理可得

$(1+2k^2)x^2+12k^2x+18k^2-8=0$， ……………………………………5 分

$\Delta=144k^4-4(1+2k^2)(18k^2-8)>0$，解得 $-2<k<2$，

由根与系数的关系可得

$x_1+x_2=\dfrac{-12k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{18k^2-8}{1+2k^2}$， 只要写对一个等式不扣分…………6 分

根据 $\dfrac{|AQ|}{|QB|}=\dfrac{|AP|}{|PB|}$，则 $\dfrac{x_0-x_1}{x_2-x_0}=\dfrac{x_1+3}{x_2+3}$， ……………………………………7 分

解得 $x_0=\dfrac{2x_1x_2+3(x_1+x_2)}{x_1+x_2+6}=\dfrac{\dfrac{36k^2-16}{1+2k^2}-\dfrac{36k^2}{1+2k^2}}{-\dfrac{12k^2}{1+2k^2}+6}=-\dfrac{8}{3}$， 只看结论……………8 分

又$l_1 \perp l_2$，则l_2的方程为$y=-\frac{1}{k}(x+3)$，

令$x=0$，则$y=-\frac{3}{k}$，即$R\left(0,-\frac{3}{k}\right)$.

故$|PR|=\sqrt{9+\left(-\frac{3}{k}\right)^2}=3\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$. ……………………………………9 分

而$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\left|-\frac{8}{3}-(-3)\right|=\frac{1}{3}\sqrt{1+k^2}$， ……………………………………10 分

记△PQR面积为S，

则$S=\frac{1}{2}|PR|\times|PQ|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\left(1+k^2\right)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+\frac{1}{k^2}+2}$

$\geq\frac{1}{2}\sqrt{2+2}=1$. （当且仅当$k=\pm1$时取等号） 只看结论……………………11 分

所以△PQR面积的最小值为1. ………………………………12 分

解法 2：由题意，直线l_1斜率存在且不为0，设直线l_1的方程为$x=ty-3$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$

由$\begin{cases}x=ty-3\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$消去$x$得$(t^2+2)y^2-6ty+1=0$， ………………………………5 分

由$\Delta=36t^2-4\times(t^2+2)\times1=32t^2-8>0$，得$t>\frac{1}{2}$或$t<-\frac{1}{2}$.

由韦达定理得$y_1+y_2=\frac{6t}{t^2+2}, y_1y_2=\frac{1}{t^2+2}$， 只要写对一个等式不扣分…………6 分

由$\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AP|}{|PB|}$及$P,A,Q,B$四点共线，知$\frac{y_0-y_1}{y_2-y_0}=\frac{y_1}{y_2}$， ……………………7 分

得$y_0=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{\frac{2}{t^2+2}}{\frac{6t}{t^2+2}}=\frac{1}{3t}$. ………………………………8 分

则$|PQ|=\sqrt{1+t^2}\,|y_0|=\frac{\sqrt{1+t^2}}{3|t|}$， ……………………………………9 分

8

因为 $l_1 \perp l_2$，则 l_2 的方程为 $x=-\dfrac{1}{t}y-3$，令 $x=0$ 得 $y=-3t$，

即 $R(0,-3t)$.

所以 $|PR|=\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}|3t|=3\sqrt{1+t^2}$. ……………………………………10 分

所以△ PQR 面积 $S=\dfrac{1}{2}|PR||PQ|=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{3|t|}3\sqrt{1+t^2}=\dfrac{1+t^2}{2|t|}=\dfrac{1}{2}\left(|t|+\dfrac{1}{|t|}\right)$

$\geq\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{|t|\cdot\dfrac{1}{|t|}}=1$. 只看结论……………………………11 分

当且仅当 $|t|=1>\dfrac{1}{2}$ 等号成立.

所以△ PQR 面积的最小值为 1. ……………………………………12 分

解法 3：由题意，直线 l_1 斜率存在且不为 0，设直线 l_1 的方程为 $x=ty-3$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$

由 $\begin{cases} x=ty-3 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+2)y^2-6ty+1=0$， ……………………………5 分

由 $\Delta=36t^2-4\times(t^2+2)\times 1=32t^2-8>0$，得 $t>\dfrac{1}{2}$ 或 $t<-\dfrac{1}{2}$.

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{6t}{t^2+2}, y_1y_2=\dfrac{1}{t^2+2}$， 只要写对一个等式不扣分…………6 分

设 $\dfrac{|AQ|}{|QB|}=\dfrac{|AP|}{|PB|}=\lambda$，由 P,A,Q,B 四点共线，知 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$，$\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB}$，

由 $\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB}$，即 $(-3-x_1,-y_1)=-\lambda(x_2-3,y_2)$，得 $y_1=\lambda y_2$. ……………………7 分

由 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$，即 $(x_0-x_1,y_0-y_1)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0)$，得

$y_0=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\dfrac{2y_1}{1+\dfrac{y_1}{y_2}}=\dfrac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{1}{3t}$. 只看结论……………………………8 分

则 $|PQ|=\sqrt{1+t^2}|y_0|=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{3|t|}$. ……………………………………9 分

因为$l_1 \perp l_2$，则l_2的方程为$x=-\frac{1}{t}y-3$，令$x=0$得$y=-3t$，

即$R(0,-3t)$．

所以$|PR|=\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}|3t|=3\sqrt{1+t^2}$． ……………………………………10 分

所以△PQR面积$S=\frac{1}{2}|PR||PQ|=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+t^2}}{3|t|}3\sqrt{1+t^2}=\frac{1+t^2}{2|t|}=\frac{1}{2}(|t|+\frac{1}{|t|})$

$\geq \frac{1}{2}\times 2\sqrt{|t|\frac{1}{|t|}}=1$， 只看结论……………………………11 分

当且仅当$|t|=1>\frac{1}{2}$等号成立

所以△PQR面积的最小值为1． ……………………………………12 分

22．（12 分）

（1）解：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$， ……………………………………1 分

由于$m=0$，则$f(x)=2x\ln x-x^2+1$．

$f'(x)=2\ln x+2-2x$， ……………………………………2 分

令$h(x)=f'(x)=2\ln x+2-2x$，

$h'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$，

当$0<x<1$时，$h'(x)=\frac{2(1-x)}{x}>0$，$f'(x)$在区间$(0,1)$上单调递增；

当$x>1$时，$h'(x)=\frac{2(1-x)}{x}<0$，$f'(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减．

则$f'(x)\leq f'(1)=2\ln 1+2-2=0$． ……………………………………3 分

所以函数$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$． ……………………………………4 分

（2）证法 1：由（1）得$f'(x)=2\ln x+2-2x-m$在区间$(0,1)$上单调递增，

当$m<0$时，$f'(1)=-m>0$，$0<e^{\frac{m}{2}-1}<1$， ……………………………………5 分

$f'\left(e^{\frac{m}{2}-1}\right)=2\left(\frac{m}{2}-1\right)+2-2e^{\frac{m}{2}-1}-m=-2e^{\frac{m}{2}-1}<0$， ……………………6 分

则$\exists x_0\in(0,1)$，使$f'(x_0)=0$，即$f'(x_0)=2\ln x_0+2-2x_0-m=0$，……7 分

10

得 $m=2\ln x_0+2-2x_0$.

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x_0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(x_0,1)$ 上单调递增.

则 $f(x)\geq f(x_0)=2x_0\ln x_0-x_0^2-mx_0+1$ ……………………………………8 分

$=2x_0\ln x_0-x_0^2-x_0(2\ln x_0+2-2x_0)+1=(x_0-1)^2>0$.

……………………………………9 分

所以 $2x\ln x-x^2-mx+1>0$. ……………………………………10 分

令 $\frac{a-b}{a+b}=x$，由于 $0<b<a$，则 $0<x<1$.

则 $\frac{2(a-b)}{a+b}\ln\frac{a-b}{a+b}-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2-\frac{m(a-b)}{a+b}+1>0$， ……………………………11 分

整理得 $2\ln\frac{a+b}{a-b}<\frac{4ab}{a^2-b^2}-m$. ……………………………………12 分

证法 2：欲证 $2\ln\frac{a+b}{a-b}<\frac{4ab}{a^2-b^2}-m$，

只要证 $2\ln\frac{a+b}{a-b}<\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}-m$， ……………………………………5 分

即证 $2\ln\frac{a+b}{a-b}<\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-m$. ……………………………………6 分

令 $x=\frac{a+b}{a-b}$，由于 $a>b>0$，则 $x>1$. ……………………………………7 分

故只要证 $2\ln x<x-\frac{1}{x}-m$，即证 $2x\ln x-x^2+1+mx<0\ (x>1)$．只要有一个等式就给分…8分

由(1)可知，函数 $h(x)=2x\ln x-x^2+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

故 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，即 $2x\ln x-x^2+1<0$. ……………………………9 分

由于 $m<0$，$x>1$，则 $mx<0$. 此处为mx<0 ……………………………10 分

所以 $2x\ln x-x^2+1+mx<0$ 成立. ……………………………………11 分

所以 $2\ln\frac{a+b}{a-b}<\frac{4ab}{a^2-b^2}-m$. ……………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。