学校____ 班级____ 姓名____ 学号____

密 封 线 内 不 要 答 题

数　学

得分____

本试卷共8页。时量120分钟。满分150分。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x\mid x=4k-1,k\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x\mid(x+1)(x-9)\leqslant 0\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 设 $a\in\mathbf{R}$,若复数 $\dfrac{1-\mathrm{i}^{2023}}{a\mathrm{i}}$ 的虚部为3(其中 i 为虚数单位),则 $a=$

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. -3　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. 3

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$,若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为

A. $\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　B. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{b}$

4. 设抛物线 $C:x^2=2py$ 的焦点为 F,$M(x,4)$ 在 C 上,$|MF|=5$,则 C 的方程为

A. $x^2=-2y$　　B. $x^2=2y$

C. $x^2=4y$　　D. $x^2=-4y$

5. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-a+1}-x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,1)$

C. $[0,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]$

6. 直线 $l:y=kx+1$ 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于 A,B 两点,则"$k=1$"是"$\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}$"的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\sqrt{2}\cos 2\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\sin 2\alpha=$

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. -1　　D. 1

8. 若实数 a,b,c,d 满足$\frac{a-2e^{a}}{b}=\frac{1-c}{d-1}=1$，则$(a-c)^{2}+(b-d)^{2}$ 的最小值是

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 关于下列命题中，说法正确的是

A. 已知 $X\sim B(n,p)$，若 $E(X)=30$，$D(X)=20$，则 $p=\frac{2}{3}$

B. 数据 91，72，75，85，64，92，76，78，86，79 的 45%分位数为 77

C. 已知 $\xi\sim N(0,1)$，若 $P(\xi>1)=p$，则 $P(-1\leqslant\xi\leqslant 0)=\frac{1}{2}-p$

D. 某校三个年级，高一有 400 人，高二有 360 人. 现按年级分层，用分层随机抽样的方法从全校抽取 57 人，已知从高一抽取了 20 人，则应从高三抽取 19 人

10. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x\cos\varphi+\cos 2x\sin\varphi(-\pi<\varphi<\pi)$，则

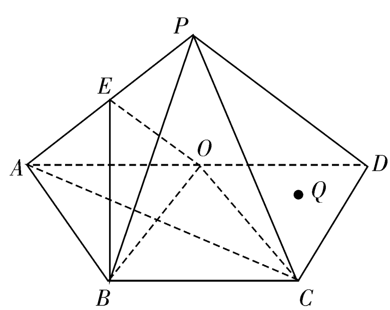
A. 函数 $f(x)$的最小正周期为 π

B. 若函数 $f(x)$为偶函数，则 $\varphi=\frac{\pi}{2}$

C. 若 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，则函数 $y=f(x)$的图象可由函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到

D. 若 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，则函数 $y=f(x)$的图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

11. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是梯形，$BC/\!/AD$，$AB=BC=CD=1$，$AD=2$，$PA=PD=\sqrt{2}$，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，O，E 分别为线段 AD，PA 的中点，点 Q 是底面 $ABCD$ 内(包括边界)的一个动点，则下列结论正确的是



A. $AC \perp BP$

B. 三棱锥 $B-AOE$ 外接球的体积为$\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

C. 异面直线 PC 与 OE 所成角的余弦值为$\frac{3}{4}$

D. 若直线 PQ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$,则点 Q 的轨迹长度为 $\sqrt{3}\pi$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足:对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$,且当 $x>0$ 时,$f(x)>-1$,若 $f(1)=1$,则下列说法正确的有

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$关于$(1,1)$对称

C. $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

D. $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)=2023^2$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

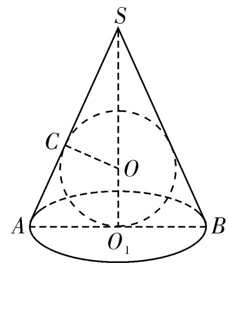
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\left(\frac{y}{x}-1\right)(2x+y)^5$ 的展开式中,x^2y^3 的系数为__________.(用数字作答)

14. 已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和,$a_1=2$,$a_2=3$,$a_3=4$,数列$\{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\}$是公差为 1 的等差数列,则 $S_{40}=$__________.

15. 已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过双曲线 C 上一点 P 向 y 轴作垂线,垂足为 Q,若$|PQ|=|F_1F_2|$且 PF_1 与 QF_2 垂直,则双曲线 C 的离心率为__________.

16. 如图,有一半径为 1 的球内切于圆锥,则当圆锥的侧面积取到最小值时,它的高为__________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知等比数列$\{a_n\}$的第二、三、四项分别是等差数列$\{b_n\}$的第二、五、十四项，且数列$\{b_n\}$的首项 $b_1=1$，公差 $d>0$.

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

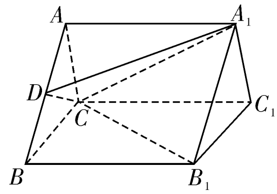
（2）设数列$\{c_n\}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均有$\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}+\frac{c_3}{a_3}+\cdots+\frac{c_n}{a_n}=b_n$ 成立，求 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{2023}$的值.

18.（12 分）在锐角$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2\sin A(c\cos B+b\cos C)=\sqrt{3}a$.

（1）求 A；

（2）若 $a=\sqrt{3}$，求 b^2+c^2+3bc 的取值范围.

19. (12 分)如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\triangle ABC$ 为等边三角形,四边形 BCC_1B_1 是边长为 2 的正方形,D 为 AB 中点,且 $A_1D=\sqrt{5}$.



(1)求证:$CD\perp$平面 ABB_1A_1;

(2)若点 P 在线段 B_1C 上,且直线 AP 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,求点 P 到平面 A_1CD 的距离.

20.(12 分)第 19 届杭州亚运会·电子竞技作为正式体育竞赛项目备受关注.已知某项赛事的季后赛后半段有四支战队参加,采取“双败淘汰赛制”,对阵表如图,赛程如下:

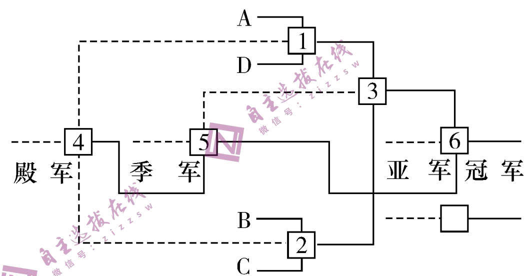
第一轮:四支队伍分别两两对阵(即比赛 1 和 2),两支获胜队伍进入胜者组,两支失败队伍落入败者组.

第二轮:胜者组两支队伍对阵(即比赛 3),获胜队伍成为胜者组第一名,失败队伍落入败者组;第一轮落入败者组两支队伍对阵(即比赛 4),失败队伍(已两败)被淘汰(获得殿军),获胜队伍留在败者组.

第三轮:败者组两支队伍对阵(即比赛 5),失败队伍被淘汰(获得季军);获胜队伍成为败者组第一名.

第四轮:败者组第一名和胜者组第一名决赛(即比赛 6),争夺冠军.

假设每场比赛双方获胜的概率均为 0.5,每场比赛之间相互独立.问:



(1)若第一轮队伍 A 和队伍 D 对阵,则他们仍能在决赛中对阵的概率是多少?

(2)已知队伍 B 在上述季后赛后半段所参加的所有比赛中,败了两场,求在该条件下队伍 B 获得亚军的概率.

21. (12 分)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{b}=1(b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，C 是椭圆的中心，点 M 为椭圆 C 上的一点，且满足 $|MF_1||MF_2|=5$，$|MC|=2$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设定点 $T(t,0)$，过点 T 的直线 l 交椭圆 C 于 P，Q 两点，若在椭圆 C 上存在一点 A，使得直线 AP 的斜率与直线 AQ 的斜率之和为定值，求实数 t 的取值范围.

22.（12 分）函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+\frac{3}{2}(a>0)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a=1$ 时，若 $f(x_1)+f(x_2)=0$，求证：$x_1+x_2\geqslant 2$；

（3）求证：对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $2\ln(n+1)+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{i}\right)^2>n$.