绝密启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　考试类型：A

2024 届高三年级摸底考试

数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。 用 2B 铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再填涂其他答案。 答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知$U=\mathbf{R}, A=\{x|-1<x<3\}, B=\{x|\ x\le 2\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$

A．$[3,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$　　C．$(3,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$

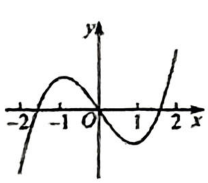
2.已知复数z满足$(z+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，则$z$的共轭复数$\bar{z}=$

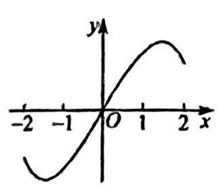
A．$2-\mathrm{i}$　　B．$2+\mathrm{i}$　　C．$-2+\mathrm{i}$　　D．$-2-\mathrm{i}$

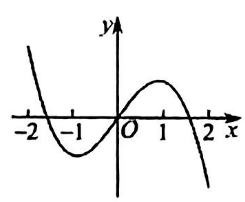
3．已知曲线$y=axe^x+\ln x$在点$(1,ae)$处的切线方程为$y=3x+b$，则

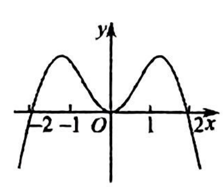
A. $a=e,b=-2$　　B. $a=e,b=2$　　C. $a=e^{-1},b=-2$　　D．$a=e^{-1},b=2$

4．函数$y=(2^x-2^{-x})\cos x$在区间$[-2,2]$上的图象大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

5.为丰富同学们的暑假生活，暑假期间学校给同学们安排了 6 场线上讲座，其中讲座A只能安排在第一或最后一场，讲座B和C必须相邻，问不同的安排方法共有

A．144 种　　B．96 种　　C．56 种　　D．34 种

6．现随机安排甲、乙等 4 位同学参加校运会跳高、跳远、投铅球比赛，要求每位同学参加一项比赛，每项比赛至少一位同学参加，事件A=“甲参加跳高比赛”，事件B=“乙参加跳高比赛”，事件C=“乙参加跳远比赛”，则

A．事件A与B相互独立　　B．事件A与C为互斥事件　　C．$P(B|A)=\frac{1}{9}$　　D．$P(C|A)=\frac{5}{12}$

7．F_1,F_2分别是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，直线$l$为双曲线$C$的一条渐近线，$F_1$关于直线$l$的对称点为$F_1'$，且$F_1'$在以$F_2$为圆心、$b$为半径的圆上，则双曲线$C$的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

8．符号$[x]$表示不超过实数x的最大整数，如$[2.3]=2$，$[-1.9]=-2$.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$.若$b_n=[\log_2 a_{n+1}]$，S_n为数列$\left\{\dfrac{8100}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和，则$[S_{2025}]=$

A．2023　　B．2024　　C．2025　　D．2026

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．已知$\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，则下列结论正确的是

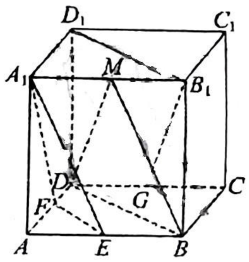
A．$\theta\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$　　B．$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$　　C．$\sin2\theta=\dfrac{24}{25}$　　D．$\cos2\theta=\dfrac{24}{25}$

10.若$a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列命题正确的是

A．若$ab\neq0$且$a<b$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B．若$0<a<1$，则$a^2<a$

C．若$b>a>0$且$c>0$，则$\dfrac{b+c}{a+c}>\dfrac{b}{a}$　　D．$a^2+b^2+1\geq2(a-2b-2)$

11.如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F,G,M均是所在棱的中点，则下列说法正确的是



A．B_1G // DM　　B．B_1G // 平面A_1EF

C．平面BDM // 平面A_1EF　　D．B_1G // A_1F

12.已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$满足$xf'(x)-f(x)=x^2(\ln x+1)$，且$f(1)=0$，则

A．$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增　　B．$f(x)$在$(\dfrac{1}{2},1)$上有极小值

C．$\dfrac{f(x)}{x}$的最小值为-1　　D．$f(x)$的最小值为0

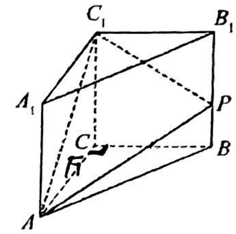
二、填空题：本大题 共4小题，每小题5分，共20分，把答案填在答题卡相应横线上。

13．$(3x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}})^8$的展开式中，$x^{-2}$项的系数为________.

14．如果平面向量$\boldsymbol{a}=(1,-2),\boldsymbol{b}=(-6,3)$,那么向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量为________.

15．已知正数a,b满足$a=b^2,\log_b a=\dfrac{a}{b}$，则函数$f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{b}-\log_a x}$的定义域为________.

16．如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，$AC=\sqrt{7}$，$BC=3$，点P在棱BB_1上，且$PA\perp PC_1$，当$\triangle APC_1$的面积取最小值时，三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为________.



三、解答题：本大题 共6小题，共70分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分10分) 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$\tan B=\sqrt{3},\cos C=\dfrac{1}{3}$，且$b=3\sqrt{6}$.

（1）求$\cos A$的值；

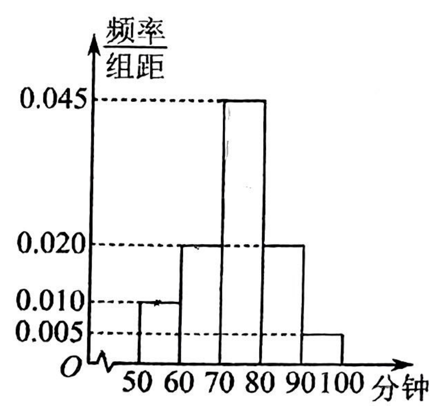
（2）求$\triangle ABC$的面积.

18.(本小题满分12分)已知数列$\{a_n\}$各项都不为0，前n项和为S_n，且$3a_n-2=S_n$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=-1$，$b_{n+1}=b_n+n$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）令$c_n=\dfrac{2a_nb_n}{n+1}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

19.(本小题满分12分)某研究机构为了解某地年轻人的阅读情况，通过随机抽样调查了100位年轻人，对这些人每天的阅读时间（单位：分钟）进行统计，得到样本的频率分布直方图，如图所示.



（1）根据频率分布直方图，估计这100位年轻人每天阅读时间的平均数$\bar{x}$（单位：分钟）(同一组数据用该组数据区间的中点值表示)；

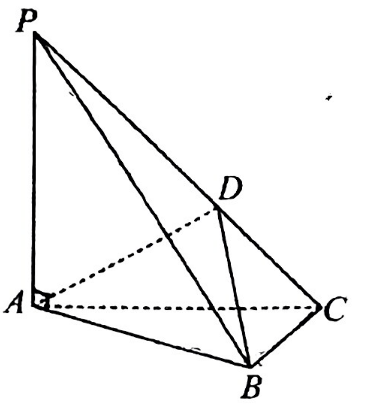
（2）若年轻人每天阅读时间X近似地服从正态分布$N(\mu,100)$，其中μ近似为样本平均数$\bar{x}$，求$P(64<X\le 94)$；

（3）为了进一步了解年轻人的阅读方式，研究机构采用分层抽样的方法从每天阅读时间位于分组$[50,60)$，$[60,70)$，$[80,90)$的年轻人中抽取10人，再从中任选3人进行调查，求抽到每天阅读时间位于$[80,90)$的人数ξ的分布列和数学期望.

参考数据：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则①$P(\mu-\delta<X\le\mu+\delta)=0.6827$；

②$P(\mu-2\delta<X\le\mu+2\delta)=0.9545$；③$P(\mu-3\delta<X\le\mu+3\delta)=0.9973$.

20. (本小题满分 12 分)如图所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\perp$ 平面 PBC.



（1）证明：$BC\perp$ 平面 PAB；

（2）若 $PA=AB=6$，$BC=3$，在线段 PC 上（不含端点），是否存在点 D，使得二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$？若存在，则确定 D 的位置；若不存在，则说明理由.

21. (本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，实数 a 为常数.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，求函数 $g(x)=f(x)-\cos x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},+\infty)$ 上的零点个数.

22. (本小题满分 12 分)已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,抛物线 $C_2:(y-m)^2=2px(p>0)$，且 C_1,C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.

（1）当 $AB\perp x$ 轴时,求 m，p 的值，并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上；

（2）求 m，p 的值，使得抛物线 C_2 的焦点恰在直线 AB 上.