

## 2024 届高三开学摸底联考 数 学 试 题

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

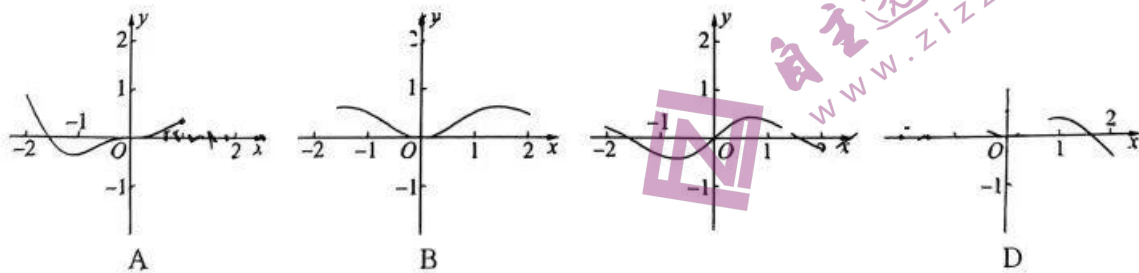
1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \left\{x \mid \frac{1}{x} < \frac{1}{2}\right\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{1\}$       B.  $\{3, 4\}$       C.  $\{2, 3, 4\}$       D.  $\{1, 2, 3, 4\}$

2. 已知  $\cos \alpha + \sqrt{5} \sin \alpha = \frac{8}{5}$ , 则  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) =$

- A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{2}{5}$       D.  $-\frac{4}{5}$

3. 函数  $f(x) = \frac{2x \sin x}{e^x + e^{-x}}$  ( $e$  为自然对数的底数) 在  $[-2, 2]$  的大致图象是



4. 已知椭圆  $\frac{x^2}{10-t} + \frac{y^2}{t-4} = 1$  的焦点在  $y$  轴上, 若焦距为 4, 则该椭圆的离心率为

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  均为等差数列, 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\frac{a_n}{b_n}$  为定值,  $S_5 = 45$ ,  $b_3 = 6$ ,  $b_7 = 14$ , 则  $a_5 =$

- A. 15      B. 56      C. 72      D. 104

开学摸底联考 数学试题 第 1 页 (共 4 页)

6. “三分损益法”是古代中国发明的制定音律时所用的生律法. 例如: 假设能发出第一个基准音的乐器的长度为 36, 那么能发出第二个基准音的乐器的长度为  $36 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24$ , 能发出第三个基准音的乐器的长度为  $24 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 32$ , …… , 也就是依次先减少三分之一, 后增加三分之一, 以此类推. 现有一兴趣小组采用此规律构造了一个共 12 项的数列  $\{a_n\}$  用来研究数据的变化, 已知  $a_1 = 216$ , 则  $a_5 =$

- A. 324                      B. 297                      C. 256                      D. 168

7. 某冷饮店有“桃喜芒芒”“草莓啾啾”“蜜桃四季春”“芋圆葡萄”四种饮品可供选择, 现有四位同学到店每人购买一杯饮品, 则恰有两种饮品没人购买的概率为

- A.  $\frac{21}{64}$                       B.  $\frac{9}{64}$                       C.  $\frac{15}{16}$                       D.  $\frac{15}{32}$

8. 已知函数  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ , 设数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = -2n + 9$ , 则  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_5) =$

- A. 36                      B. 24                      C. 20                      D. 18

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知实数  $m, n$  满足  $0 < m < \frac{1}{2}, 1 < n < 2$ , 则下列关系中正确的是

- A.  $m^n < n^m$                       B.  $\sin m < \sin \frac{1}{n}$                       C.  $mn^2 > 1$                       D.  $\log_n n < \log_m m$

10. 已知随机变量  $\xi_i$  服从两点分布, 且  $P(\xi_i = 1) = p_i (i = 1, 2)$ , 若  $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$ , 则下列判断不正确的是

- A.  $E(\xi_2) < D(\xi_2)$                       B.  $E(\xi_1) < E(\xi_2)$                       C.  $E(\xi_1) < D(\xi_1)$                       D.  $D(\xi_1) < D(\xi_2)$

11. 若关于  $x$  的方程  $x^2 + x + m = 0 (m \in \mathbf{R})$  有两个不等复数根  $x_1$  和  $x_2$ , 其中  $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ( $i$  是虚数单位), 则下面四个选项正确的有

- A.  $m = 1$                       B.  $|x_1| > |x_2|$                       C.  $|x_1| = 1$                       D.  $x_1^2 = \bar{x}_2$

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^4 - 3x, & x < 0, \\ 2^x - 2, & x \geq 0, \end{cases}$  若关于  $x$  的方程  $f^2(x) - (2a + 1)f(x) + a^2 + a = 0$  有 6 个不同的实根, 则实数  $a$  可能的取值有

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D. 2

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知  $t$  为实数,  $a = (2, t)$ ,  $b = (3, 0)$ , 则向量  $a$  在向量  $b$  方向上的投影向量为\_\_\_\_\_.

14. 已知  $\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^6$  的展开式中的常数项为\_\_\_\_\_. (用数字作答)

15. 已知双曲线  $E$  的一个焦点为  $F$ , 点  $F$  到双曲线  $E$  的一条渐近线  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  的距离为 1, 则双曲线  $E$  的标准方程是\_\_\_\_\_.

16. 已知在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA+BC=4$ ,  $AB \perp AC$ ,  $PA \perp$  平面  $ABC$ , 则三棱锥  $P-ABC$  的外接球表面积的最小值为\_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 某厂家为增加销售量特举行有奖销售活动, 即每位顾客购买该厂生产的产品后均有一次抽奖机会. 在一个不透明的盒子中放有四个大小、质地完全相同的小球分别标有 1, 2, 3, 5 四个数字, 抽奖规则为: 每位顾客从盒中一次性抽取两个小球, 记下小球上的数字后放回. 记两个小球上的数字分别为  $\xi, \eta$ , 若  $|\xi - \eta|$  为奇数即为中奖.

(1) 求某顾客甲获奖的概率;

(2) 求随机变量  $X = |\xi - \eta|$  的分布列与数学期望  $E(X)$

18. (12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n \neq 0$ , 且有  $\frac{a_{n+1} + 2}{2} = a_n + n$ .

(1) 证明: 数列  $\{a_n + 2n\}$  是等比数列;

(2) 求数列  $\left\{\frac{n}{a_n + 2n}\right\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

19. (12 分) 如图,  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\triangle ABC$  外一点  $D$  ( $D$  与  $\triangle ABC$  在同一平面内) 满足  $\angle BAC = \angle DAC$ ,  $AB = CD = 2$ ,  $\sin \angle ACB + \cos \angle ACB = \frac{\sqrt{2}c + a}{b}$ .

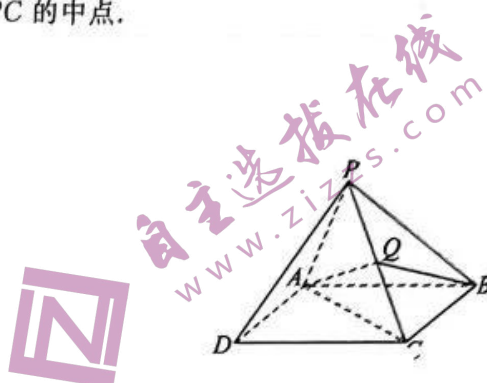
(1) 求  $B$ ;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为 2, 求线段  $AD$  的长.



20.(12分)如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,底面四边形  $ABCD$  为矩形,平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA \perp PB$ ,  $AB = \sqrt{5}$ ,  $PB = BC = 2$ ,点  $Q$  为  $PC$  的中点.

- (1)求证:平面  $ABQ \perp$  平面  $PAC$ ;  
(2)求二面角  $A-PC-D$  的余弦值.



21.(12分)已知函数  $f(x) = x^2 - mx \ln x + 1$ ,  $m \in \mathbf{R}$  且  $m \neq 0$ .

- (1)当  $m=1$  时,求曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;  
(2)若关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq \frac{2}{e}x$  恒成立,其中  $e$  是自然对数的底数,求实数  $m$  的取值范围.

22.(12分)已知点  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点,点  $P(2, 1)$ ,  $Q(0, 1)$ , 且  $|PF| = |PQ|$ .

- (1)求抛物线  $C$  的标准方程;  
(2)若斜率存在的直线  $l$  过点  $P$  且交抛物线  $C$  于  $M, N$  两点,若直线  $MP \perp NF$  交抛物线于  $A, B$  两点 ( $M, N$  与  $A, B$  不重合),求证:直线  $AB$  过定点.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线