

## 高二数学参考答案及评分标准

2021.7

### 一、单项选择题(每小题5分,共40分)

1-4 BCDC 5-8 BADA

### 二、多项选择题(每小题5分,共20分)

9. BD 10. AD 11. ABC 12. ABD

### 三、填空题(每小题5分,共20分)

13. 9.6 14.  $\frac{8}{9}$  15. 2 16.  $6+3\sqrt{5}$

### 四、解答题(本大题共6小题,共70分)

17. 解:(1)由题意,令  $x=1$  得  $(3-1)^n = 2^n = 32$ , ..... 2分

解得  $n=5$ . ..... 4分

(2)因为二项式  $(3x - \frac{1}{x})^5$  的通项为  $T_{r+1} = C_5^r (3x)^{5-r} \cdot (-\frac{1}{x})^r$

$= C_5^r (-1)^r \cdot 3^{5-r} \cdot x^{5-2r}$ , ..... 6分

所以  $(x + \frac{1}{x})(3x - \frac{1}{x})^5$  展开式中的常数项为

$x \cdot C_5^3 \cdot (-1)^3 \cdot 3^{5-3} \cdot x^{-1} + \frac{1}{x} C_5^2 \cdot (-1)^2 \cdot 3^{5-2} \cdot x$

$= -9C_5^3 + 27C_5^2$

$= 18C_5^2$

$= 180$ . ..... 10分

18. 解:(1)已知成绩在  $[75, 80)$  的学生有 20 人,故其频率为  $\frac{20}{100} = 0.2$ ,

所以  $b = \frac{0.2}{5} = 0.040$ , ..... 2分

所以  $(0.006 + 0.034 + 0.040 + a + 0.036 + 0.014 + 0.010) \times 5 = 1$ ,

得  $a = 0.060$ , ..... 3分

由题得左边第一个矩形的面积为 0.03,第二个矩形的面积为 0.17,第三个矩形的面积为 0.2,第四个矩形的面积为 0.3,所以中位数在第四个矩形里面,设中位数为  $x$ ,

则  $0.03 + 0.17 + 0.2 + (x - 80) \times 0.06 = 0.5$ ,

所以  $x \approx 81.7$ ,所以中位数为 81.7; ..... 5分

(2)由题意知,成绩在  $[65, 70)$  的学生人数为 3 人,成绩在  $[95, 100)$  的学生人数为 5 人,

$X$  所有可能的取值为 0, 1, 2, 3, ..... 6分

高二数学答案第 1 页(共 4 页)

$$P(X=0) = \frac{C_3^3 C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56},$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^0 C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28},$$

故 X 的发布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

..... 10 分

X 服从超几何分布, 所以 X 的期望为  $E(X) = 3 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8}$ . ..... 12 分

19. 证明: (1) 因为点 D 为线段 PB 的中点, O 为线段 AB 的中点,

所以  $OD \parallel PA$ , ..... 2 分

又因为  $OE \parallel AC, OE \cap OD = O, PA \cap AC = A$ ,

所以平面 DOE // 平面 PAC, ..... 4 分

又因为  $DE \subset$  平面 DOE, 所以  $DE \parallel$  平面 PAC. .... 6 分

(2) 因为点 C 在以 AB 为直径的底面  $\odot O$  上, 所以  $\angle ACB = 90^\circ, BC \perp AC$ ,

又因为  $OE \parallel AC$ , 所以  $BC \perp OE$ , ..... 8 分

因为 PA 是圆柱的母线, 所以  $PA \perp$  底面  $\odot O$ , 因为  $OD \parallel PA$ , 所以  $OD \perp$  底面  $\odot O$ ,

所以  $OD \perp BC$ , ..... 10 分

又因为  $OE \subset$  平面 ODE,  $OD \subset$  平面 ODE, 且  $OD \cap OE = O$ ,

所以  $BC \perp$  平面 ODE,

又因为  $BC \subset$  平面 PBC, 所以平面 DOE  $\perp$  平面 PBC. .... 12 分

20. (1) 解: 由条件  $\bar{x} = 3, \bar{y} = 18.2$ ,

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y} = 41, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55,$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{41}{10} = 4.1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 18.2 - 4.1 \times 3 = 5.9,$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程  $\hat{y} = 4.1x + 5.9$ , ..... 5 分

$$x = 6 \text{ 时}, \hat{y} = 4.1 \times 6 + 5.9 = 30.5,$$

预测 2021 年共享单车数为 30.5 万辆. .... 6 分

(2) 由题意支出费用  $X$  服从正态分布, 即  $X \sim N(800, 100^2)$ ,  
 $P(800 \leq X < 1000) = P(800 \leq X < 800 + 2 \times 100) = 0.4772$ , ..... 8 分  
 所以支出费用在  $[800, 1000)$  的单车总利润为  $30.5 \times 0.4772 \times 10 = 145.546$  万元,  
 ..... 9 分

$$P(X < 800) = \frac{1}{2},$$

所以支出费用在 800 元以下的单车总利润为  $30.5 \times 0.5 \times 20 = 305$  万元, ..... 11 分  
 所以预测 2021 年总利润为  $145.546 + 305 = 450.546$  万元. .... 12 分

21. (1) 证明: 因为平面  $A_1D_1DA \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $A_1D_1DA \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,  
 $AB \subset$  平面  $ABCD, AB \perp AD$ ,

所以  $AB \perp$  平面  $A_1D_1DA$ , ..... 2 分

因为  $AB \parallel A_1B_1$ ,

所以  $A_1B_1 \perp$  平面  $A_1D_1DA$ ,

又因为  $A_1D \subset$  平面  $A_1D_1DA$ ,

所以  $A_1B_1 \perp A_1D$ , 即  $\angle B_1A_1D = 90^\circ$ . .... 4 分

(2) 连接  $A_1O$ , 因为  $A_1A = A_1D$ , 所以  $A_1O \perp AD$ ,

又因为平面  $A_1D_1DA \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $A_1D_1DA \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,

所以  $A_1O \perp$  平面  $ABCD$ ,

所以  $A_1O$  为四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的高, ..... 6 分

设  $AB = a$ , 则  $AD = 2a, OA_1 = a$ ,

所以四棱柱的体积  $V = S_{\square ABCD} \times OA_1 = a \times 2a \times a = 2a^3 = 2$ ,

解得  $a = 1$ , ..... 7 分

以  $O$  为坐标原点,  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA_1}$  为  $x, y, z$  轴的正方向建立空间直角坐标系,

则  $A(0, -1, 0), B(1, -1, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), A_1(0, 0, 1), M(1, 0, 0)$ ,

$\overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1), \overrightarrow{BM} = (0, 1, 0), \overrightarrow{A_1M} = (1, 0, -1)$ , ..... 8 分

因为  $AB \perp$  平面  $AA_1D_1D$ , 所以  $AB \perp A_1D$ , 又  $A_1D \perp A_1A, A_1A \cap AB = A$ ,

所以  $A_1D \perp$  平面  $A_1B_1BA$ , 所以平面  $AA_1B$  的一个法向量  $\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1)$ ,

设平面  $A_1BM$  的一个法向量为  $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$ , 则  $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} y = 0, \\ x - z = 0, \end{cases}$

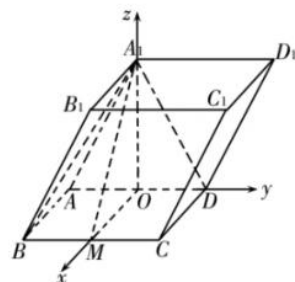
令  $x = 1$ , 则  $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 1)$ . .... 10 分

设二面角  $A - A_1B - M$  的平面角为  $\theta$ ,

则  $|\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ , ..... 11 分

所以  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

即二面角  $A - A_1B - M$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . .... 12 分



22. 解:(1) 设恰好经过 3 次检验能把有抗体血液样本全部检验出来为事件 A,

$$\text{所以 } P(A) = \frac{C_2^1 C_2^1 A_3^3 + A_3^3 A_2^2}{A_5^5} = \frac{3}{10},$$

所以恰好经过 3 次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率为  $\frac{3}{10}$ . ... 4 分

(2) 由已知得  $E(\xi_1) = k$ ,

$\xi_2$  的所有可能取值为  $1, k+1$ .

$$\text{所以 } P(\xi_2 = 1) = (1-p)^k, P(\xi_2 = k+1) = 1 - (1-p)^k,$$

$$\text{所以 } E(\xi_2) = (1-p)^k + (k+1)[1 - (1-p)^k] = k+1 - k(1-p)^k, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

若  $E(\xi_1) = E(\xi_2)$ , 则  $k = k+1 - k(1-p)^k$ ,

$$\text{所以 } k(1-p)^k = 1, (1-p)^k = \frac{1}{k},$$

$$\text{所以 } 1-p = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}, \text{ 即 } p = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}},$$

所以  $p$  关于  $k$  的函数关系式为  $p = f(k) = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} (k \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } k \geq 2)$ . ... 7 分

证明: 令  $t = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} (k \geq 2 \text{ 且 } k \in \mathbf{N}^*)$

$$\text{所以 } \ln t = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k} = -\frac{\ln k}{k}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = -\frac{\ln x}{x} (x \geq 2),$$

$$g'(x) = \frac{\ln x - 1}{x},$$

所以  $g'(x) = 0$  得  $x = e$ , ... 9 分

所以  $x \in (2, e), g'(x) < 0, g(x)$  单调递减,

$x \in (e, +\infty), g'(x) > 0, g(x)$  单调递增, ... 10 分

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = g(e) = -\frac{1}{e}, \text{ 所以 } -\frac{\ln x}{x} \geq -\frac{1}{e},$$

因为  $k \geq 2$  且  $k \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\text{所以 } -\frac{\ln k}{k} > -\frac{1}{e}, \text{ 即 } \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k} > -\frac{1}{e}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } e^{\frac{1}{k} \ln \frac{1}{k}} > e^{-\frac{1}{e}},$$

$$\text{即 } \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} > e^{-\frac{1}{e}},$$

$$\text{所以 } p = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} < 1 - e^{-\frac{1}{e}}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

