大庆铁人中学 2021 级高二学年下学期期中考试

数学试题

命题人：张金烨　审题人：曹玉艳

试题说明：1、本试题满分 150 分，答题时间 120 分钟。

2、请将答案填写在答题卡上，考试结束后只交答题卡。

第Ⅰ卷　选择题部分

一、单选题（每小题只有一个选项正确，共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。）

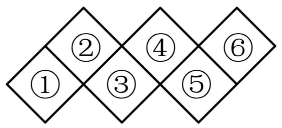
1.已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且满足$a_{100}=2023$，$a_{2023}=100$，则a_{2123}的值为（　　）

A．2033　　B．2123　　C．0　　D．123

2.设可导函数$f(x)$=lnx+x，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（　）

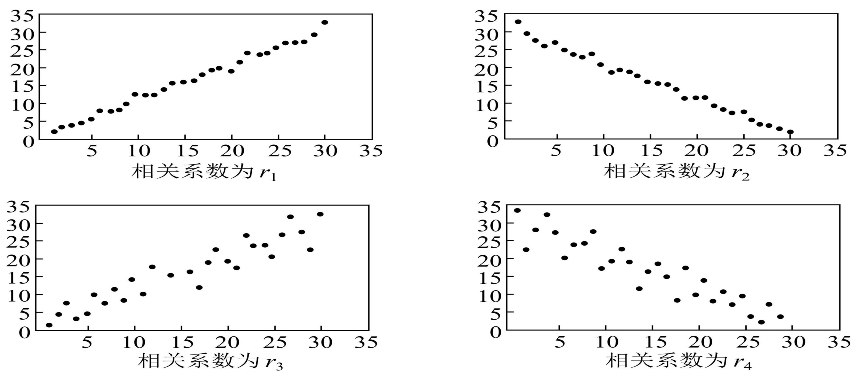
A．-2　　B．2　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．6

3.用红、黄、蓝三种颜色给下图着色，要求有公共边的两块不着同色.在所有着色方案中，①③⑤着相同色的方案有（　　）



A．96 种　　B．24 种　　C．48 种　　D．12 种

4.对四组数据进行统计，获得以下散点图，关于其相关系数的比较，正确的是（　　）



A．$r_2<r_4<0<r_3<r_1$　　B．$r_4<r_2<0<r_1<r_3$

C．$r_4<r_2<0<r_3<r_1$　　D．$r_2<r_4<0<r_1<r_3$

5.已知随机变量X的分布列满足：$P(X=\text{n})=\dfrac{a}{n(n+1)}$（n=1, 2, 3, 4），其中$a$为常数，则$P\left(\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{5}{2}\right)=$（　）

A．$\dfrac{55}{68}$　　B．$\dfrac{55}{136}$　　C．$\dfrac{5}{6}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

6.若$\mathrm{A}_{2n}^{2}=\mathrm{A}_{3}^{2}\mathrm{A}_{n}^{2}$，$\mathrm{C}_{9}^{x}=\mathrm{C}_{9}^{2x}$，则 x+n=（　　）

A．5　　B．3　　C．6　　D．2 或 5

7.用 1、2、3、4、5 组成没有重复数字的五位数$\overline{abcde}$，（$\overline{abcde}$代表万位,千位,百位,十位,个位依次为a, b, c, d, e）其中满足$a>b>c<d<e$的五位数有n个。则在$1+(1+x)^1+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^n$的展开式中，$x^2$的系数是（　）

A．56　　B．35　　C．20　　D．84

8.设$a=7\ln\dfrac{7}{6}$, $b=\dfrac{6}{7}\mathrm{e}^{\frac{1}{7}}$, $c=1$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

二、多选题（本题共 4 小题，共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对得得 2 分，有选错的得 0 分）

9.下列命题正确的是（　）

A．对于事件A，B，若$A\subseteq B$，且$P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，则$P(B|A)=1$

B．若随机变量$\xi\sim N(2,\sigma^2)$且$P(\xi<4)=0.84$，则$P(2<\xi<4)=0.16$

C．若某种水果的果实横径X（单位：mm）服从正态分布$N(70,5^2)$，则果实横径在$(65,80)$的概率为 0.7185（若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$ $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$）

D．已知随机变量ξ,η满足$\eta=-\xi+8$，若$E(\xi)=6, D(\xi)=2.4$，则$E(\eta)=2, D(\eta)=2.4$

10. 若（x−2）^{11}=$a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots\cdots+a_{11}(x-1)^{11}$则下列结论正确的是（　）

A. $a_0=2$　　　　B. $a_{10}=-11$

C. $a_2+a_4+\cdots+a_{10}=-1023$　　　　D. $a_1+2a_2+3a_3\cdots+11a_{11}=1$

11. 有3台车床加工同一型号的零件，第1，2，3台加工的次品率分别为6%，5%，4%，加工出来的零件混放在一起．已知第1，2，3台车床加工的零件数的比为5：6：9，现任取一个零件，记事件A_i=“零件为第i台车床加工”（$i=1，2，3$），事件B=“零件为次品”，则下列结论中正确的是（　）

A. $P(A_1)=0.25$　　　　B. $P(B|A_2)=\frac{1}{6}$

C. $P(B)=0.048$　　　　D. $P(A_1|B)=\frac{5}{16}$

12. 一个袋子中装有除颜色外完全相同的10个球，其中有6个黑球，4个白球，现从中任取4个球，记随机变量X为取出白球的个数，随机变量Y为取出黑球的个数，若取出一个白球得2分，取出一个黑球得1分，随机变量Z为取出4个球的总得分，则下列结论中不正确的是（　）

A. $P(X=1)=\frac{1}{2}$　　B. $X+Y=4$　　C. $E(X)>E(Y)$　　D. $E(Z)=\frac{28}{5}$

三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 某种机械设备的使用年限x（单位：年）与维修费y（单位：万元）的统计数据如下表所示：

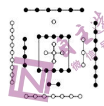
使用年限x（单位：年）	1	2	3	4	5	6	7
维修费y（单位：万元）	2.90	3.30	3.60	4.40	4.80	5.20	5.90

由上表数据可知，y与x的相关系数为______.

（精确到0.01，参考公式和数据：$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=14.00$，$\sum_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2=7.08$，$\sqrt{198.24}\approx14.10$）

14. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和是S_n，且$S_n=2a_n-1$，若$a_n\in(0,2023)$，则称项a_n为“和谐项”，那么数列$\{a_n\}$的所有“和谐项”的和为_____

15. 河图是上古时代神话传说中伏羲通过黄河中浮出龙马身上的图案，与自己的观察，画出的“八卦”，而龙马身上的图案就叫做“河图”．把一到十分成五组，如图，其口诀：一六共宗，为水居北；二七同道，为火居南；三八为朋，为木居东；四九为友，为金居西；五十同途，为土居中．“河图”将一到十分成五行属性分别为金，木，水，火，土的五组，在五行的五种属性中，五行相克的规律为：金克木，木克土，土克水，水克火，火克金；五行相生的规律为：木生火，火生土，土生金，金生水，水生木．现从这十个数中随机抽取3个数，则这3个数字的属性互不相克的条件下，取到属性为土的数字的概率为_____



16. 某高校大一新生中的6名同学打算参加学校组织的“雅荷文学社”、“青春风街舞社”、“羽乒协会”、“演讲团”、“吉他协会”五个社团，若每名同学必须参加且只能参加1个社团且每个社团至多两人参加，则这6个人中至多有1人参加“演讲团”的不同参加方法数为________．（用数字作答）

四、解答题（本题共6小题，共70分，解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤）

17. （10分）已知$(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中第2项与第3项的二项式系数之比为2:5.

(1)求常数项；

(2)求系数最大的项.

18. （12分）数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}-a_n^2=2a_n$，$b_n=\log_2(a_n+1)$，即

(1)求证：$\{b_n\}$是等比数列；

(2)若$c_n=\frac{n}{b_n}+1$，求$\{c_n\}$的前n项和为T_n.

19. （12分）某工厂车间有6台相同型号的机器，各台机器相互独立工作，工作时发生故障的概率都是$\frac{1}{4}$，且一台机器的故障由一个维修工处理．已知此厂共有甲、乙、丙3名维修工，现有两种配备方案，方案一：由甲、乙、丙三人维护，每人负责2台机器；方案二：由甲乙两人共同维护6台机器，丙负责其他工作。

(1)对于方案一，设 X 为甲维护的机器某一时刻发生故障的台数，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$；

(2)在两种方案下，分别计算某一时刻机器发生故障时不能得到及时维修的概率，并以此为依据来判断，哪种方案能使工厂的生产效率更高?

20. (12 分)已知 $f(x)=\frac{1}{2}\ln x-x$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $g(x)=f(x)+mx^2$，记 x_1,x_2 为函数 $g(x)$ 的两个极值点，求 $g(x_1)+g(x_2)$ 的取值范围.

21. （12 分）某技术部门对工程师进行达标等级考核，需要进行两轮测试，每轮测试的成绩在 90 分及以上的定为该轮测试通过，只有通过第一轮测试的人员才能进行第二轮测试，两轮测试的过程及结果相互独立，并规定：①两轮测试均通过的定为一级工程师；②仅通过第一轮测试，而第二轮测试没通过的定为二级工程师；③第一轮测试没通过的不予定级.

现有某公司的甲、乙、丙三位工程师参加等级考核，已知他们通过第一轮测试的概率分别为 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$，通过第二轮测试的概率均为 $\frac{1}{2}$.

(1)求经过本次考核，甲，乙，丙三位工程师中恰有两位被定为一级工程师的概率；

(2)公司为鼓励以上三名工程师参加等级考核设制两套奖励方案：

方案一：奖励定为一级工程师 2000 元，奖励定为二级工程师 1500 元，未定级给予鼓励奖 500 元；

方案二：获得一级或二级工程师均奖励 2000 元，未获得任何等级的不予奖励.

采用哪套方案，公司对于以上三人奖励支出会更少?

22. （12 分）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

(1)当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围；

(3)求证：$e^{2x}-x>\frac{e}{6}(x^3+3x+2)$