THUSSAT 中学生标准学术能力测试

# 中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 11 月测试

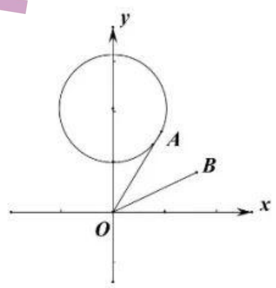
## 理科数学 参考答案

一、选择题：本题共 **12** 小题，每小题 **5** 分，共 **60** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | A | A | B | A | B | D | C | D | D | C | C |

12．【解析】点 $A(x,y)$ 在圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 上，$B(\sqrt{3},1)$

则 $\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|}=|\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=2\cos\angle AOB$




如图，当 $OA$ 与圆相切时，$\angle AOB$ 取得最小值 $\dfrac{\pi}{6}$

所以 $\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\sqrt{3}$，此时点 $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$．

二、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．

13．$[-2,2]$　　14．10　　15．$\sqrt{7}$　　16．$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$

16．【解析】设 $g(x)=f(x)-2x^2+1$，则 $g'(x)=f'(x)-4x>0$

所以函数 $g(x)$ 在 R 上为增函数．

$\because g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-2\times(\frac{1}{2})^2+1=0$

$\therefore g(\sin\alpha)=f(\sin\alpha)-2\sin^2\alpha+1=f(\sin\alpha)+\cos2\alpha=g(\frac{1}{2})>0$

得 $\sin\alpha>\dfrac{1}{2}$，又 $\because 0\le\alpha\le2\pi$，$\therefore\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{5\pi}{6}$

所以不等式 $f(\sin\alpha)+\cos2\alpha>0$ 的解集为 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$．

三、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 **17~21** 题为必考题，每道试题考生都必须作答．第 **22**、**23** 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 **60** 分．

17．（12 分）

解：

（1）该企业男员工从不使用方式 B 的概率为 $\dfrac{100}{600}=\dfrac{1}{6}$ ----------------------------2 分

该企业女员工从不使用方式 B 的概率为 $\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$ ----------4 分

（2）该企业男员工经常使用方式 A 的概率为 $\frac{200}{600}=\frac{1}{3}$ ----------1 分

该企业女员工经常使用方式 A 的概率为 $\frac{300}{400}=\frac{3}{4}$ ----------2 分

两名男员工经常使用方式 A，女员工不经常使用方式 A 的概率为

$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{36}$ ----------4 分

有一名男员工经常使用方式 A，一名女员工经常使用方式 A 的概率为

$C_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$ ----------6 分

所以 3 人中恰有 2 人经常使用方式 A 的概率为 $\frac{1}{36}+\frac{1}{3}=\frac{13}{36}$ ----------8 分

18.（12 分）

解：

（1）$a_3=a_1+4$，$a_4=a_1+6$ ----------2 分

$\because a_1$，$a_3$，$a_4$ 成等比数列，$\therefore a_3^{\ 2}=a_1a_4$，得 $(a_1+4)^2=a_1(a_1+6)$

$\therefore a_1=-8$ ----------4 分

（2）$S_n=na_1+n(n-1)$ ----------4 分

$\because S_n\geq -20$，$\therefore n^2+(a_1-1)n+20\geq 0$，即 $n+\frac{20}{n}\geq 1-a_1$

$\because n+\frac{20}{n}$ 的最小值为 9 ----------6 分

$\therefore 1-a_1\leq 9$，所以 $a_1$ 的取值范围为 $[-8,+\infty)$ ----------8 分

19.（12 分）

解：

（1）设 $O$ 为 $AC$ 的中点

$\because AD=CD$，$\therefore OD\perp AC$ ----------1 分

$\because$ 平面 $ACD\perp$ 平面 $ABC$

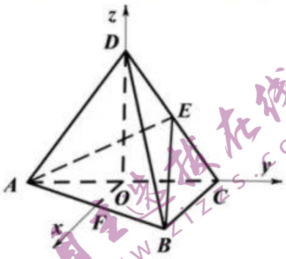
$\therefore OD\perp$ 底面 $ABC$ ----------3 分

进而得 $OD\perp BC$，又 $\because AD\perp BC$

$\therefore BC\perp$ 平面 $ACD$ ----------5 分

进而得 $BC\perp AC$ ----------6 分

（2）设 $AB$ 中点为 $F$




$\because OF \parallel BC$，$BC \parallel AC$，$\therefore OF \perp AC$

由（1）知 $OF$、$OC$、$OD$ 两两垂直，

以 $OF$、$OC$、$OD$ 为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴正半轴建立空间直角坐标系------------------------1 分

则 $A(0,-1,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,1,0)$，$F(1,0,0)$

$\because E$ 是 $CD$ 的中点

$\therefore E\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$------------------------------------2 分

设平面 $ABE$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\because \overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AF}=(1,1,0)$，$\therefore \begin{cases}\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ x+y=0\end{cases}$

不妨取 $y=-1$，则 $\vec{n}=(1,-1,\sqrt{3})$ ------------------------------------4 分

$\because \overrightarrow{CD}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\therefore \sin\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\cdot 2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$------------------------6 分

20.（12 分）

解：

（1）设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\because f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\therefore$ 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上递增，在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上递减------------------------------------2 分

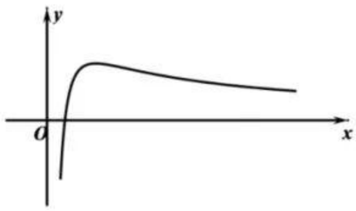
$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\le f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\therefore$ 方程 $x-\mathrm{e}\ln x=0$ 有唯一的零点 $\mathrm{e}$

即方程 $\mathrm{e}^x=x^{\mathrm{e}}$ 有唯一的零点 $\mathrm{e}$，猜想（1）正确------------------------------4 分

（2）由 $a^b=b^a$ 得 $\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}$

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$



由（1）知$a,b$分别在$(1,\mathrm{e})$和$(\mathrm{e},+\infty)$内，

不妨设$a\in(1,\mathrm{e})$，$b\in(\mathrm{e},+\infty)$

设$g(x)=f(x)-f\left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{x}\right)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{(2-\ln x)x}{\mathrm{e}^2}$

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\dfrac{1-\ln x}{\mathrm{e}^2}=\dfrac{(1-\ln x)(\mathrm{e}^2-x^2)}{x^2\mathrm{e}^2}$--------------------------------2 分

当$x\in(1,\mathrm{e})$时，$1-\ln x>0$，$\mathrm{e}^2-x^2>0$

$\therefore$ 当$x\in(1,\mathrm{e})$时，$g'(x)>0$，$g(x)$递增

由此得，当$a\in(1,\mathrm{e})$时，$g(a)<g(\mathrm{e})=0$--------------------------------4 分

$\therefore f(a)-f\left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{a}\right)<0$

$\because f(a)=f(b)$，$\therefore f(b)<f\left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{a}\right)$--------------------------------6 分

又$\because b,\dfrac{\mathrm{e}^2}{a}\in(\mathrm{e},+\infty)$且$f(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$递减，$\therefore b>\dfrac{\mathrm{e}^2}{a}$

$\therefore ab>\mathrm{e}^2$，猜想（2）正确--------------------------------8 分

21.（12 分）

解：

（1）$\because$ 点$M(2,y_M)$在抛物线$\Gamma$上，$\therefore y_M=\dfrac{2}{p}$ --------------------------------1 分

因为线段$MN$的中点$\left(1,\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right)$抛物线$\Gamma$上--------------------------------2 分

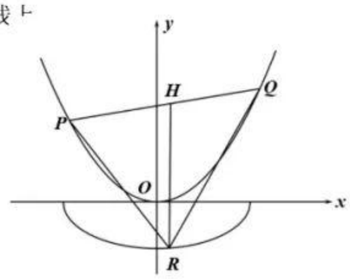
$\therefore 1=2p\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right)$，得$p=1$--------------------------------4 分

（2）设$R(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$PQ$的中点$H(x_3,y_3)$

$\because$ 点$P$和$PR$的中点$\left(\dfrac{x_1+x_0}{2},\dfrac{y_1+y_0}{2}\right)$均在抛物线上

$\therefore \begin{cases} x_1^2=2y_1 \\ \left(\dfrac{x_1+x_0}{2}\right)^2=2\times\dfrac{y_1+y_0}{2} \end{cases}$ ----------------1 分

整理得$x_1^2-2x_0x_1-x_0^2+4y_0=0$



同理得 $x_2^2-2x_0x_2-x_0^2+4y_0=0$

$\therefore x_1,x_2$ 是方程 $x^2-2x_0x-x_0^2+4y_0=0$ 的两个根

进而 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0-x_0^2$------------------------------------3 分

$$\therefore x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$$

$$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{4}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{4}$$

$$=\frac{4x_0^2-2(4y_0-x_0^2)}{4}=\frac{3x_0^2}{2}-2y_0$$ ------------------------------4 分

如图，$\because x_3=x_0$，$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot|y_3-y_0|\cdot|x_1-x_2|$

$$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{3x_0^2}{2}-3y_0\right|\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{3x_0^2}{2}-3y_0\right|\cdot\sqrt{4x_0^2-4(4y_0-x_0^2)}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(x_0^2-2y_0\right)^{\frac{3}{2}}$$ ------------------6 分

$\because x_0^2=4-4y_0^2$ 且 $y_0<0$

$$\therefore S=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(4-4y_0^2-2y_0\right)^{\frac{3}{2}}(-1\le y_0<0)$$

所以当 $y_0=-\frac{1}{4}$ 时，$\Delta PQR$ 的面积 $S$ 取得最大值 $\frac{51\sqrt{34}}{16}$----------------------8 分

（二）选考题：共 **10** 分，请考生在第 **22**、**23** 题中任选一道题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

解：

（1）由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得------------------------------------2 分

曲线 $C$ 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=4$------------------------------------4 分

（2）将直线方程代入曲线 $C$ 的方程得 $\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\frac{t^2}{2}=4$

整理得 $t^2+\sqrt{2}at+a^2-4=0$①------------------------------------2 分

设方程①的两个根为 $t_1$、$t_2$

$\because |AB|=2\sqrt{2}$

$\therefore |t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{2a^2-4(a^2-4)}=2\sqrt{2}$ ---------------------4 分

得 $a=\pm 2$------------------------------------------------------------------6 分

23. [选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

解：

（1）$f(x)=\begin{cases} x+4, & x\ge 2 \\ 3x, & -1\le x<2 \\ -x-4, & x<-1 \end{cases}$------------------------------------------2 分

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上递减，在 $[-1,+\infty)$ 上递增，$f(-4)=0$，$f(0)=0$

$\therefore$ $f(x)\le 0$ 的解集为 $[-4,0]$------------------------------------------------------4 分

（2）由题设 $f\left(\dfrac{a}{3}\right)\le 0$

$\therefore -4\le \dfrac{a}{3}\le 0$，即 $-12\le a\le 0$----------------------------------------------------2 分

$g(x)=\begin{cases} 3x-a, & x\ge \dfrac{a}{3} \\ -3x+a, & x<\dfrac{a}{3} \end{cases}$

下面证明当 $-12\le a\le 0$ 时，对任意 $x\in \mathrm{R}$，都有 $f(x)\le g(x)$

①当 $-4\le x\le 0$ 时

$f(x)\le 0\le g(x)$，$\therefore$ $f(x)\le g(x)$------------------------------------------------3 分

②当 $x<-4$ 时，$\because \dfrac{a}{3}>-4$

$\therefore g(x)-f(x)=-3x+a-(-x-4)=-2x+4+a$

由 $x<-4$，$a\ge -12$，得 $g(x)-f(x)>0$------------------------------------4 分

③$\because \dfrac{a}{3}\le 0$

$\therefore$ 当 $0<x<2$ 时，$g(x)-f(x)=-a\ge 0$

当 $x\ge 2$ 时，$g(x)-f(x)=2x-a-4\ge -a\ge 0$

综上，当 $-12\le a\le 0$ 时，对任意 $x\in \mathrm{R}$，都有 $g(x)\ge f(x)$------------6 分

（利用图像说明给一定的分值比例，第 2 问利用图像说明最高给 4 分，四种情况论述时的具体过程可酌情简化）