高三数学参考答案

1. B　因为 $A=\{x|x^2<4\}=\{x|-2<x<2\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$.

2. C　由 $\begin{cases} z_1+z_2=2, \\ z_1-z_2=2\mathrm{i}, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} z_1=1+\mathrm{i}, \\ z_2=1-\mathrm{i}, \end{cases}$ 则 $z_1z_2=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2$.

3. A　由题可知 $\dfrac{b}{a}=2\sqrt{2}$，即 $b=2\sqrt{2}a$，则 C 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=3$.

4. C　设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_1+a_3=3$，$a_3+a_5=6$，得 $q^2=2$，则 $a_9+a_{11}=(a_1+a_3)q^8=3\times 2^4=48$.

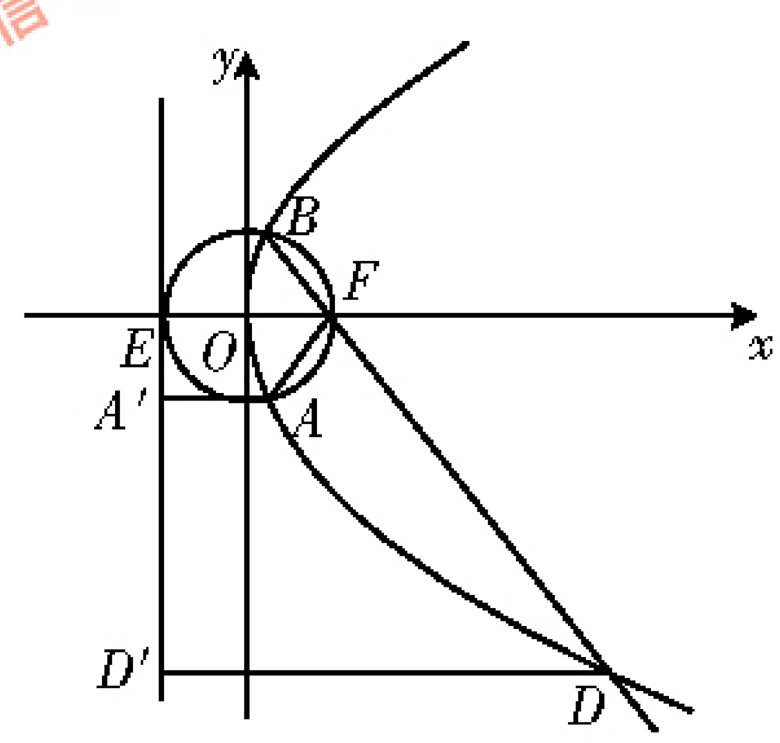
5. D　由题可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq\pm 1\}$，且 $f(-x)=\dfrac{x^2}{3-3^{|x|}}=f(x)$，故函数为偶函数，排除 A，C. 又 $f(2)=\dfrac{4}{3-9}=-\dfrac{2}{3}<0$，所以选 D.

6. D　若导函数 $f'(x)=2$ 有解，则直线 $y=2x+m$ 就可以为该函数图象的切线. 对于选项 A，令 $f'(x)=2x+1=2$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$，满足条件. 对于选项 B，因为 $f'(x)=3x^2+\mathrm{e}^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(0)=1<2$，$f'(2)=12+\mathrm{e}^2>2$，所以方程 $f'(x)=3x^2+\mathrm{e}^x=2$ 有解，满足条件. 对于选项 C，令 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+x=2$，解得 $x=1$，满足条件. 对于选项 D，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2>2$，不满足条件.

7. B　由图知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$.

因为 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

8. D　由题意知 $F(2,0)$，则 $\dfrac{p}{2}=2$，即 $p=4$. 如图，过点 A 和点 D 分别作 AA' 和 DD' 垂直于抛物线的准线，易知 $|AF|=|BF|=|AA'|$，$|DD'|=|DF|$. 设 $\angle BFE=\angle AFE=\theta$，则 $|BF|=|EF|\cos\theta=4\cos\theta$，则 $|AA'|+|AF|\cos\theta=|EF|$，即 $4\cos\theta+4\cos^2\theta=4$，解得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $|AA'|=4\cos\theta=2\sqrt{5}-2$. $|DD'|=|EF|+|DF|\cos\theta$，则 $|DF|=4+|DF|\cos\theta$，解得 $|DF|=\dfrac{4}{1-\cos\theta}=6+2\sqrt{5}$，所以 $|DF|-|AF|=6+2\sqrt{5}-(2\sqrt{5}-2)=8$.

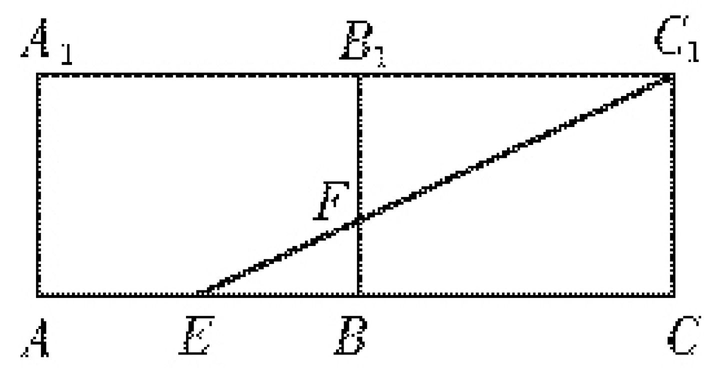


9. AC　因为 $x_1+x_2+x_3+x_4=200$，$x_5=10$，$x_6=90$，所以 $\bar{x}=\dfrac{200+10+90}{6}=50$，A 正确，B 不正确. 因为 $x_i\in(10,90)$，$i=1,2,3,4$，所以去除 $x_5=10$，$x_6=90$ 后剩余数据的波动性更小，方

差更小，所以 $m>n$，C 正确，D 不正确.

10. BD　因为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{12})$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 不正确. 当 $x=-\frac{7\pi}{24}$ 时，$2x+\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{2}$，故直线 $x=-\frac{7\pi}{24}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，B 正确. 由 $0<x<\frac{3\pi}{2}$，得 $\frac{\pi}{12}<2x+\frac{\pi}{12}<\frac{37\pi}{12}$，当且仅当 $2x+\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{17\pi}{24}$ 时，$f(x)$ 取得极小值，C 不正确. $f(x+\frac{5\pi}{24})=2\sin[2(x+\frac{5\pi}{24})+\frac{\pi}{12}]=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})=2\cos 2x$，所以若要得到函数 $y=2\cos 2x$ 的图象，可将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度，D 正确.

11. ABC　如图，将平面 AA_1B_1B 沿着轴 BB_1 展开到平面 BB_1C_1C 内，则 $EF+FC_1$ 的最小值为 $EC_1=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$，A 正确. 当 F 为 BB_1 的中点时，$D_1E^2=7$，$EF^2=\frac{3}{2}$，$D_1F^2=\frac{17}{2}$，则 $D_1E^2+EF^2=D_1F^2$，从而 $EF\perp D_1E$，B 正确. 当 F 为 BB_1 的中点时，$EF/\!/AB_1/\!/DC_1$，C 正确. 设 $BF=a(0\leqslant a^2\leqslant 2)$，则 $EF^2=1+a^2$，$EC^2=5$，$FC^2=4+a^2$，$\cos\angle EFC=\frac{EF^2+FC^2-EC^2}{2EF\cdot FC}=\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^2)(4+a^2)}}$. 若 $\angle EFC=60^\circ$，则 $\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^2)(4+a^2)}}=\frac{1}{2}$，整理得 $3a^4-5a^2-4=0$，解得 $a^2=\frac{5+\sqrt{73}}{6}>2$ 或 $a^2=\frac{5-\sqrt{73}}{6}<0$，不符合题意，D 不正确.



12. ABD　令 $f(x)=1-2x^2-\cos x$，则 $f'(x)=-4x+\sin x$. 令 $g(x)=-4x+\sin x$，则 $g'(x)=-4+\cos x<0$ 恒成立，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(\frac{1}{3})=\frac{7}{9}-\cos\frac{1}{3}<f(0)=0$，即 $a<b$. 令 $h(x)=x-\ln x-1$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增. 故 $h(\frac{16}{9})=\frac{7}{9}-2\ln\frac{4}{3}>h(1)=0$，即 $c<a$. 故选 ABD.

13. -20　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $6+x=0$，即 $x=-6$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3x-2=-20$.

14. $(-1,1)$　令 $y=-1$，则 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)<1$ 的解集为 $(-1,1)$.

15. $\frac{17}{24}$　由题可知，填报的专业中至少有 1 个是学生甲感兴趣的概率为 $1-\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{17}{24}$.

16. 16π　由 $\angle ABD=\angle ABC=60^\circ$，$BC=BD=2$，$AB=4$，根据余弦定理可得 $AC=AD=2\sqrt{3}$，则 $AC\perp BC$，$AD\perp BD$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的直径为 $AB=4$，故三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi\cdot(\frac{AB}{2})^2=16\pi$.

17. 解：(1)设$\{a_n\}$的公差为d，因为a_1,a_3,a_9成等比数列，所以$a_3^2=a_1a_9$，即$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$，又$d\neq0$，所以$d=a_1=3$，…………3分

故$a_n=a_1+(n-1)d=3n$. …………5分

(2)由(1)可得，$b_n=\dfrac{3}{n(n+1)}=3(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$， …………8分

则$T_n=3(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{3n}{n+1}$. …………10分

18. 解：(1)由$b\cos C+c\cos B=3a\cos A$，可得到$\sin B\cos C+\sin C\cos B=3\sin A\cos A$， …………2分

即$\sin(B+C)=3\sin A\cos A$. …………3分

因为$B+C=\pi-A$，所以$\sin(B+C)=\sin A\neq0$，

故$\cos A=\dfrac{1}{3}$. …………5分

(2)由$\cos A=\dfrac{1}{3}$，可得$\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， …………6分

因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，所以$\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，则$bc=3$. …………8分

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$4=b^2+c^2-\dfrac{2}{3}bc=(b+c)^2-\dfrac{8}{3}bc$，

所以$b+c=2\sqrt{3}$， …………10分

故$\triangle ABC$的周长是$a+b+c=2\sqrt{3}+2$. …………12分

19. (1)证明：连接SE，因为$\triangle SCD$与$\triangle SBD$均为正三角形，所以$SB=SC=SD=BD=CD$. …………1分

又E为BC的中点，所以$DE\perp BC$，$SE\perp BC$. …………2分

因为$DE\cap SE=E$，所以$BC\perp$平面SDE. …………3分

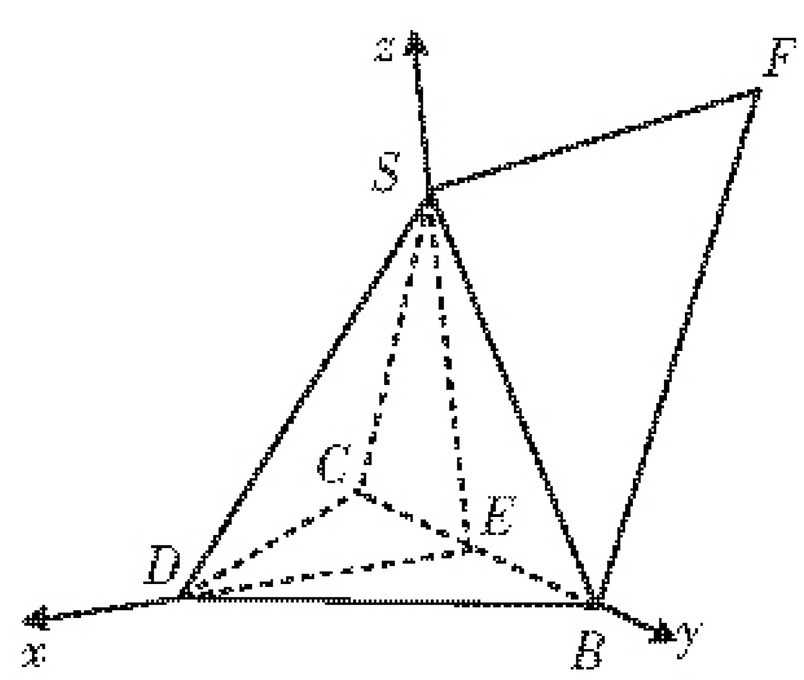
又$SD\subset$平面SDE，所以$BC\perp SD$. …………4分

(2)解：因为$BE=DE$，所以$\triangle BCD$为等腰直角三角形，且$BD\perp CD$. …………5分

不妨令$BD=2$，则$CE=\sqrt{2}$. 由$SE\perp BC$，得$SE=\sqrt{2}$，

则$SD^2=DE^2+SE^2$，故$SE\perp DE$. …………6分

以E为坐标原点，直线ED,EB,ES分别为x,y,z轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



$B(0,\sqrt{2},0)$，$S(0,0,\sqrt{2})$，$D(\sqrt{2},0,0)$.

因为$\overrightarrow{SF}=\overrightarrow{DE}$，所以$F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

则$\overrightarrow{FB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BS}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$. …………7分

设平面 FBS 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0,\\-\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$. …………………………………………………………………… 8 分

设平面 BDS 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}-\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}z_2=0,\\\sqrt{2}x_2-\sqrt{2}y_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

…………………………………………………………………… 9 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， …………………………………… 10 分

故二面角 $F-BS-D$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………… 12 分

20. 解：(1)设 A,B,C 分别表示购买的排球来自甲厂、乙厂、丙厂，D 表示购买的排球是合格品，则 $P(A)=40\%$，$P(B)=P(C)=30\%$，$P(D|A)=95\%$，$P(D|B)=92\%$，$P(D|C)=96\%$，所以 $P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)$ ………………… 2 分

$=40\%\times95\%+30\%\times92\%+30\%\times96\%=94.4\%$. ……………………………… 4 分

(2)设小李到该市场批发 2 个排球进行销售获得的纯利润为 X 元，

依题意可得 X 的可能取值为 $10+8,10-6,-5+8,-5-6$，即 $18,4,3,-11$，………… 6 分

$P(X=18)=0.95\times0.96=0.912$，…………………………………………………… 7 分

$P(X=4)=0.95\times(1-0.96)=0.038$，……………………………………………… 8 分

$P(X=3)=(1-0.95)\times0.96=0.048$，……………………………………………… 9 分

$P(X=-11)=(1-0.95)\times(1-0.96)=0.002$， ……………………………………… 10 分

所以 $E(X)=18\times0.912+4\times0.038+3\times0.048+(-11)\times0.002=16.69$，

故小李到该市场批发 2 个排球进行销售获得的纯利润的数学期望为 16.69 元. …… 12 分

21. 解：(1)设 $P(x,y)$，因为点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$ 的距离的 2 倍，

所以 $|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，则 $x^2-8x+16=4x^2-8x+4+4y^2$， ………………… 3 分

整理得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，故曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………… 5 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\x=my-1,\end{cases}$

整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，…………………………………………………… 6 分

则 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$. ……………………………………………… 7 分

因为 l 过点 $(-1,0)$，所以 $S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}\times2\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$

$=\dfrac{12}{3\sqrt{m^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$. …………………………………………………………… 9 分

令 $t=\sqrt{m^2+1}$，$t\geqslant 1$，$f(t)=3t+\frac{1}{t}$，则 $f'(t)=3-\frac{1}{t^2}>0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，则 $f(t)\geqslant$

$f(1)=4$，则$\frac{12}{3t+\frac{1}{t}}\leqslant 3$. ………………………………………………………………………… 11 分

故$\triangle MAB$ 面积的最大值为 3. ………………………………………………………………………… 12 分

22.(1)解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1+a$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}^{-a-1}$. … 1 分

由 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\mathrm{e}^{-a-1}$，由 $f'(x)>0$，解得 $x>\mathrm{e}^{-a-1}$. ………………………… 3 分

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0,\mathrm{e}^{-a-1})$，单调递增区间为$(\mathrm{e}^{-a-1},+\infty)$. ……………… 5 分

(2)证明：令 $\varphi(x)=f(x)-a\mathrm{e}^x+1=a(x-\mathrm{e}^x)+x\ln x+1$，

令 $k(x)=x-\mathrm{e}^x$，则 $k'(x)=1-\mathrm{e}^x$，则 $k(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以 $k(x)\leqslant k(0)=-1<0$.

由 $a\geqslant 1$，可得 $a(x-\mathrm{e}^x)+x\ln x+1\leqslant x-\mathrm{e}^x+x\ln x+1$，………………………………… 7 分

即证$\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-1>0$.

令 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-1(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}$. ……

…… 8 分

由 $g'(x)=0$，可得 $x=1(x=0$ 舍去).

因为当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x-1>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}-1-1=\mathrm{e}-2>0$，………………………………………………… 10 分

所以 $g(x)>0$，则$\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-1>0$，所以 $x-\mathrm{e}^x+x\ln x+1<0$，结论成立. ……… 12 分