绝密★启用前 【考试时间：2020 年 4 月 24 日下午 15：00～17：00】

湖南湖北四校 2020 届高三学情调研联考

理科数学试题参考答案及解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	B	C	B	A	D	C	B	D	C	B	A	D

1、B.【解析】由题意得，$P=[0,4]$，$Q=(-3,3)$，$\therefore P\cup Q=(-3,4]$，故选 B.

2、C【解析】设 $x=a+bi,y=a-bi$，代入得 $(2a)^2-3(a^2+b^2)i=4-6i$，所以

$(2a)^2=4,3(a^2+b^2)=6$，解得 $|a|=1,|b|=1$，所以 $|x|+|y|=2\sqrt{2}$.

3、B 解析：设大正方体的边长为 x,则小正方体的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}x$，设落在小正方形内的米粒数大约为 N，则 $\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}x\right)^2}{x^2}=\frac{N}{200}$，解得：$N\approx 27$.

4、 A【解析】$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,

所以$\lambda=\frac{1}{4},\mu=\frac{3}{4}$, 从而求得$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{3}$.

5、D 解析：$\because$函数 $f(x)$是偶函数，$\therefore f(x)=f(-x)$ 在 R 上恒成立，$\therefore m=0$，$\therefore$当 $x\geq 0$ 时，易得 $f(x)=2^x-1$ 为增函数，$\therefore a=f(log_{0.5}3)=f(log_2 3)$，$b=f(log_2 5)$，$c=f(2)$，$\because$ $log_2 3<2<log_2 5$，$\therefore a<c<b$

6、C 由三视图可知多面体是棱长为 2 的正方体中的三棱锥 $P-ABC$，

故 $AC=1$，$PA=2$，$BC=PC=\sqrt{5}$，$AB=2\sqrt{2}$，$PB=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta PAC}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，$S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$，

$\therefore$该多面体的侧面最大面积为$2\sqrt{2}$．故选 C.

7、B 解析：双曲线 C 左支上的任意一点 M 均满足$|MF_2|+|MN|>4b$，

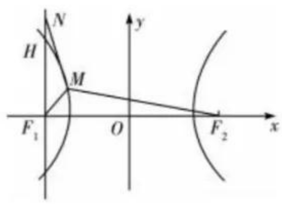
即$(|MF_2|+|MN|)_{\min}>4b$，

又$|MF_2|+|MN|\geq 2a+|MF_1|+|MN|\geq 2a+|NF_2|=2a+\frac{3b^2}{2a}$

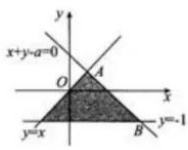
$\therefore 2a+\dfrac{3b^2}{2a}>4b \Rightarrow 4a^2+3b^2>8ab$

$\Rightarrow 3\cdot\dfrac{b}{a}+4\dfrac{a}{b}-8>0 \Rightarrow \dfrac{b}{a}>2$ 或 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{2}{3}$

$\therefore e^2=1+\dfrac{b^2}{a^2}, e>\sqrt{5}$ 或 $1<N<\dfrac{\sqrt{13}}{3}$



8、D【解析】由条件可得可行域，如图所示，



由 $\begin{cases} y=x \\ x+y-a=0 \end{cases}$，得 $A\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$. 因为直线 $x+y-a=0$ 与直线 $y=x$ 垂直，所以只需圆心到 A 的距离小于等于 1 满足题意即可，即

$\left(\dfrac{a}{2}-3\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}-3\right)^2\le 1$，解得 $6-\sqrt{2}\le a\le 6+\sqrt{2}$，当 $a\ge 6+\sqrt{2}$ 时恒存在点满足题意，故实数 a 的取值范围 $\left[6-\sqrt{2},+\infty\right)$

9 、C【解析】$\because a\cos B-b\cos A=\dfrac{3}{5}c$ ∴由正弦定理，得

$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\dfrac{3}{5}\sin C$,

$\because C=\pi-(A+B)\Rightarrow \sin C=\sin(A+B)$ ，，

$\therefore \sin A\cos B-\sin B\cos A=\dfrac{3}{5}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$ ，

整理，得 $\sin A\cos B=4\sin B\cos A$， 同除以 $\cos A\cos B$，得 $\tan A=4\tan B$ ，由此可得 $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\dfrac{3\tan B}{1+4\tan^2 B}=\dfrac{3}{\dfrac{1}{\tan B}+4\tan B}$， $\because A$、B 是三角形内角，且 $\tan A$ 与 $\tan B$ 同号， $\therefore A$、B 都是锐角，即 $\tan A>0$，$\tan B>0$，

$\because \dfrac{1}{\tan B}+4\tan B\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{\tan B}\cdot 4\tan B}=4$

理数答案 第2页，总 10页

$tan(A-B)=\dfrac{3}{\dfrac{1}{tanB}+4tanB}\le\dfrac{3}{4}$,

当且仅当 $\dfrac{1}{tanB}=4tanB$，即 $tanB=\dfrac{1}{2}$ 时，$tan(A-B)$ 的最大值为 $\dfrac{3}{4}$.

10、B 解析：$\because$ $2\cos^2\left(\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=1+\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\sin\omega x$，

$f(x)=\sin\omega x(1+\sin\omega x)-\sin^2\omega x=\sin\omega x$.

令 $\omega x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 可得 $x=\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{2k\pi}{\omega}$，$\because$ $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上恰好取得一次最大值，$\therefore$ $0\le\dfrac{\pi}{2\omega}\le\pi$ 解得 $\omega\ge\dfrac{1}{2}$.

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，解得：$-\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{2k\pi}{\omega}\le x\le\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{2k\pi}{\omega}$，$\because$ $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上是增函数，

$\therefore\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{3}\ge-\dfrac{\pi}{2\omega}\\ \dfrac{5\pi}{6}\le\omega\le\dfrac{3}{5}\end{cases}$，解得 $\omega\le\dfrac{3}{5}$. 综上，$\dfrac{1}{2}\le\omega\le\dfrac{3}{5}$. 故选：B.

11、答案：A 解析：将直线 l 与抛物线 C 联立 $\begin{cases}y^2=4x\\x-y+1=0\end{cases}$，得 $(x-1)^2=x-y+1=0$，即直线 l 与抛物线 C 相切，且切点为 $(1,2)$. 又 P 是直线 l 上点，当点 P 为切点 $(1,2)$ 时，$Q(0,1)$. 又 $F(1,0)$，此时 $\triangle PQF$ 为直角三角形，且外接圆的半径为 1，故圆的面积为 π. 当点 P 不为切点 $(1,2)$ 时，设点 $P(x_0,x_0+1)$，切线斜率为 k，则切线方程为 $y-(x_0+1)=k(x-x_0)$，即 $kx-y-kx_0+x_0+1=0$. 将切线方程与抛物线方程联立 $\begin{cases}y^2=4x\\kx-y-kx_0+x_0+1=0\end{cases}$，得 $\dfrac{ky^2}{4}-y-kx_0+x_0+1=0$，其中 $\Delta=(k-1)(kx_0-1)=0$，则 $k_{PQ}=k=\dfrac{1}{x_0}$. 此时切线方程化简得 $y=\dfrac{1}{x_0}x+x_0$，则点 $Q(0,x_0)$，可得 $k_{FQ}=-x_0$. 又 $k_{PQ}\cdot k_{FQ}=-1$，所以 $\triangle PQF$ 为直角三角形. 设 $\triangle PQF$ 的外接圆的半径为 r，PF 的中点为 $M\left(\dfrac{1+x_0}{2},\dfrac{1+x_0}{2}\right)$，且点 M 为外接圆的圆心，则 $r^2=|MQ|^2=\left(\dfrac{1+x_0}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1+x_0}{2}\right)^2=\dfrac{x_0^2+1}{2}$，所以 $\triangle PQF$ 外接圆的面积为 $\pi r^2=\dfrac{x_0^2+1}{2}\pi$，当 $x_0=0$ 时，面积取到最小值为 $\dfrac{\pi}{2}$，综上，$\triangle PQF$ 外接圆面积的最小值为 $\dfrac{\pi}{2}$.

12、D 解析：设焊接的三棱锥形铁架如图所示，取 AB 的中点 D,连接 SD,CD.

由题设条件易知 $AB\perp$ 平面 SCD ,且 $SD=CD=\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}$，则$\triangle SCD$ 的面积为$\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{4-\frac{a^2}{2}}$,三棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{4-\frac{a^2}{2}}\cdot a=\frac{1}{6}a^2\sqrt{4-\frac{a^2}{2}}$， $0<a<2\sqrt{2}$，令

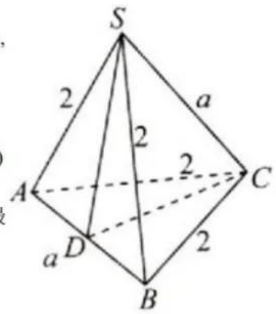
$a^2=t,t\in(0,8)$,则 $V=\frac{1}{6}t\sqrt{4-\frac{t}{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{4t^2-\frac{1}{2}t^3}$.令 $f(x)=4t^2-\frac{1}{2}t^3,t\in(0,8)$，

则 $f'(t)=8t-\frac{3}{2}t^2=t(8-\frac{3}{2}t)$.

令 $f'(t)=0$ 得 $t=\frac{16}{3}$，且 $t\in(0,\frac{16}{3})$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增，$t\in(0,\frac{16}{3})$

时，$f'(t)<0$， $f(t)$ 单调递减，所以 $f(t)_{\max}=f(\frac{16}{3})-16^2\times\frac{4}{27}$，则 V 的最大值为$\frac{1}{6}\sqrt{16^2\times\frac{4}{27}}=\frac{1}{6}\times16\times\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{16\sqrt{3}}{27}$,故此三棱锥体积的取值范围是

$(0,\frac{16\sqrt{3}}{27}]$.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．2 【解析】二项式$\left(ax-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式的通项是 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(ax)^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r\cdot a^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{6-2r}$.令 $6-2r=0$，得 $r=3$，因此二项式$\left(ax-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中的常数项是 $C_6^3\cdot a^{6-3}\cdot(-1)^3=-160$，故 $a=2$.

14、 $F+V-E=2$

解析：凸多面体的面数为 F. 顶点数为 V 和棱数为 E，

①正方体：F=6，V=8，E=12，得 $F+V-E$=8+6−12=2；

②三棱柱：F=5，V=6，E=9，得 $F+V-E$=5+6−9=2；

③三棱锥：F=4，V=4，E=6，得 $F+V-E$=4+4−6=2.

根据以上几个例子，猜想：凸多面体的面数 F. 顶点数 V 和棱数 E 满足如下关系：
$F+V-E=2$
再通过举四棱锥、六棱柱、…等等，发现上述公式都成立。
因此归纳出一般结论： $F+V-E=2$
故答案为： $F+V-E=2$

15、 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$解析：$\because f(x)=e^x(x-1),\therefore f'(x)=xe^x$，$\therefore$对于任意的 $x\in[-2,2]$，当 $x\in[-2,0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,2]$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在$[-2,0)$上为减函数，在$(0,2]$上为增函

数。$\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的极小值点，也是最小值点且最小值为 $[-2,2]$，

$\therefore$ 对于任意的 $x_1\in[-2,2], f(x_1)_{\min}=-1$，而总存在 $x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$，

$f(x_1)_{\min}>g(x_2)_{\min}$. $\because g(x)=mx$，$\therefore$ ① $m=0$ 时，$g(x_2)=0$，不合题意，

② $m>0$ 时，$g(x_2)=mx_2\in[m,2m]$，此时 $m<-1$，不合题意，③ $m<0$ 时，

$g(x_2)=mx_2\in[2m,m]$，$\therefore g(x_2)_{\min}=2m$，$\therefore 2m<-1, m<-\frac{1}{2}$.

16、①②④解析：$\because \sin A:\sin B:\sin C=\ln 2:\ln 4:\ln t$，$\therefore a:b:c=\ln 2:\ln 4:\ln t$，

故可设 $a=k\ln 2$，$b=k\ln 4=2k\ln 2$，$c=k\ln t$，$k>0$ $\because b-a<c<b+a$，$\therefore k\ln 2<c<3k\ln 2$，

则 $2<t<8$，当 $2^{\sqrt{5}}<t<8$ 时，$a^2+b^2-c^2<0$，故 ΔABC 为钝角三角形.

而 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=ab\cos C=ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\frac{5k^2\ln^2 2-c^2}{2}$，

又 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=mc^2$，$\therefore m=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{c^2}=\frac{\frac{5k^2\ln^2 2-c^2}{2}}{c^2}=\frac{5k^2\ln^2 2}{2c^2}-\frac{1}{2}$.

$\because k\ln 2<c<3k\ln 2$，$\therefore \frac{5k^2}{18k^2\ln^2 2}<\frac{5k^2}{2c^2}<\frac{5k^2}{2k^2\ln^2 2}$，即 $\frac{5}{18}<\frac{5k^2\ln^2 2}{2c^2}<\frac{5}{2}$，$\therefore -\frac{2}{9}<m<2$.当

$t=4$，$a=\ln 2$ 时，ΔABC 的面积为 $\frac{\sqrt{15}\ln^2 2}{4}$，故四个结论中，只有③不正确.填①②④。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17、（1）$\because b_{n+1}=\frac{b_n}{(1-a_n)(1+a_n)}=\frac{b_n}{b_n(2-b_n)}=\frac{1}{2-b_n}$，$\therefore b_{n+1}-1=\frac{1}{2-b_n}-1$ $\therefore$

$\frac{1}{b_{n+1}-1}=\frac{2-b_n}{b_n-1}=-1+\frac{1}{b_n-1}$. $\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{b_n-1}\right\}$ 是以 -4 为首项，-1 为公差的等差数列.

$\therefore \frac{1}{b_n-1}=-4-(n-1)=-n-3$，　　$\therefore b_n=1-\frac{1}{n+3}=\frac{n+2}{n+3}$.

（2）$\because a_n=1-b_n=\frac{1}{n+3}$. $\therefore$

$S_n=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}=\frac{n}{4(n+4)}$

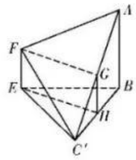
$\therefore 4aS_n-b_n=\dfrac{an}{n+4}-\dfrac{n+2}{n+3}=\dfrac{(a-1)n^2+(3a-6)n-8}{(n+3)(n+4)}$． 由条件可知

$(a-1)n^2+(3a-6)n-8<0$ 恒成立即可满足条件，设 $f(n)=(a-1)n^2+3(a-2)n-8$，当 $a=1$ 时，$f(n)=-3n-8<0$ 恒成立,当 $a>1$ 时，由二次函数的性质知不可能成立． 当 $a<1$ 时，

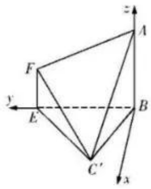
对称轴 $-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a-2}{a-1}=-\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{a-1})<0$，$f(n)$ 在 $[1,+\infty)$ 为单调递减函数．

$f(1)=(a-1)+(3a-6)-8=4a-15<0$，$\therefore a<\dfrac{15}{4}$，$\therefore$ 时 $4aS_n<b$ 恒成立． 综上知：$a<1$ 时，$4aS_n<b$ 恒成立．

18．【解析】(Ⅰ)解法一：∵F 是 AC 的中点，∴AF＝C′F.设 AC′的中点为 G,连接 FG.设 BC′的中点为 H,连接 GH,EH.易证:C′E⊥EF,BE⊥EF,∴∠BEC′即为二面角 C′－EF－B 的平面角．∴∠BEC′＝60°，而 E 为 BC 的中点．易知 BE＝EC′，∴△BEC′为等边三角形，∴EH⊥BC′.
①∵EF⊥C′E，EF⊥BE，C′E∩BE＝E，∴EF⊥平面 BEC′.而 EF∥AB，∴AB⊥平面 BEC′，∴AB⊥EH，即 EH⊥AB． ②由①②，BC′∩AB＝B，∴EH⊥平面 ABC′.∵G，H 分别为 AC′，BC′的中点．∴GH 綊 $\frac{1}{2}$AB 綊 FE，∴四边形 EHGF 为平行四边形．FG∥EH，FG⊥平面 ABC′，又 FG 平面 AFC′.∴平面 AFC′⊥平面 ABC′.6 分



解法二：如图，建立空间直角坐标系，设 AB＝2.
则 A(0，0，2)，B(0，0，0)，F(0，2，1)，E(0，2，0)，C′($\sqrt{3}$，1，0).
设平面 ABC′的法向量为 $\boldsymbol{a}$＝(x_1，y_1，z_1)，$\overrightarrow{BA}$＝(0，0，2)，$\overrightarrow{BC'}$＝($\sqrt{3}$，1，0)，$\therefore\begin{cases}z_1=0,\\ \sqrt{3}x_1+y_1=0,\end{cases}$ 令 x_1＝1，则 $\boldsymbol{a}$＝(1，$-\sqrt{3}$，0)，设平面 AFC′的法向量为 $\boldsymbol{b}$＝(x_2，y_2，z_2)，$\overrightarrow{AF}$＝(0，2，－1)，$\overrightarrow{AC'}$＝($\sqrt{3}$，1，－2)，



$\therefore\begin{cases}2y_2-z_2=0,\\ \sqrt{3}x_2+y_2-2z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{b}$＝($\sqrt{3}$，1，2).
∵$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$＝0，∴平面 AFC′⊥平面 ABC′.6 分

(Ⅱ)如图，建立空间直角坐标系，设 AB＝2.则 A(0，0，2)，B(0，0，0)，F(0，2，1)，E(0，2，0)，C′($\sqrt{3}$，1，0)．显然平面 BEC′的法向量 $\boldsymbol{m}$＝(0，0，1)，8 分

设平面 AFC′的法向量为 $\boldsymbol{n}$＝(x，y，z)，$\overrightarrow{AC'}$＝($\sqrt{3}$，1，－2)，$\overrightarrow{AF}$＝(0，2，－1)，

$\therefore\begin{cases}2y-z=0,\\ \sqrt{3}x+y-2z=0,\end{cases}$ ∴ $\boldsymbol{n}$＝($\sqrt{3}$，1，2).9 分 cos〈$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$〉＝$\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，10 分
由图形观察可知，平面 AFC′与平面 BEC′所成的二面角的平面角为锐角．
∴平面 AFC′与平面 BEC′所成二面角大小为 45°.12 分

19、

解析：(1)甲解密成功所需时间的中位数为 47，

$\therefore 0.01\times5+0.014\times5+b\times5+0.034\times5+0.04\times(47-45)=0.5$，

解得 $b=0.026$；

$\therefore 0.04\times3+0.032\times5+a\times5+0.010\times10=0.5$，

解得 $a=0.024$；

$\therefore$甲在 1 分钟内解密成功的频率是 $f=1-0.01\times10=0.9$(4 分)

(2)①由题意及(1)可知第一个出场选手解密成功的概率为 $P_1=0.9$；

第二个出场选手解密成功的概率为 $P_2=0.9\times\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\times1=0.91$，

第三个出场选手解密成功的概率为 $P_3=0.9\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\times2=0.929$，

所以该团队挑战成功的概率为 $P=0.9+0.1\times0.91+0.1\times0.09\times0.929=0.999361$

(或令"该团队挑战成功"的事件为 A，"挑战不成功"的事件为 $\overline{A}$，

$P(\overline{A})=(1-0.9)(1-0.91)(1-0.929)=0.1\times0.09\times0.071=0.000639$，

$\therefore$该团队挑战成功的概率为 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.0001639=0.999361$(8 分)

②由①可知按 P_i 从小到大的顺序的概率分别 p_1，p_2，p_3，

根据题意知 X 的取值为 1，2，3；

则 $P(X=1)=0.9$，$P(X=2)=(1-0.9)\times0.91=0.091$，

$P(X=3)=(1-0.9)(1-0.91)=0.1\times0.09=0.009$，

所以所需派出的人员数目 X 的分布列为

X	1	2	3
P	0.9	0.091	0.009

$E(X)=1\times0.9+2\times0.091+3\times0.009=1.109$(12 分)

20、（1）因为 $c=m, e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $a=2m, b=\sqrt{3}m$，所以 $\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{b}$ 取最小值时 $m=1$，

此时抛物线 $C_1: y^2=-4x$，此时 $a=2, b^2=3$，所以椭圆 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）因为 $c=m,e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $a=2m,b=\sqrt{3}m$，设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4m^2}+\frac{y^2}{3m^2}=1$，

$P(x_0,y_0),Q(x_1,y_1)$ 由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4m^2}+\frac{y^2}{3m^2}=1\\ y^2=-4mx\end{cases}$ 得 $3x^2-16mx-12m^2=0$，所以 $x_0=-\frac{2}{3}m$ 或

$x_0=6m$（舍去），代入抛物线方程得 $y_0=\frac{2\sqrt{6}}{3}m$，即 $P\left(-\frac{2m}{3},\frac{2\sqrt{6}m}{3}\right)$，

于是 $\left|PF_1\right|=\frac{5m}{3},\left|PF_2\right|=2a-\left|PF_1\right|=\frac{7m}{3},\left|F_1F_2\right|=2m=\frac{6m}{3}$，又 ΔPF_1F_2 的边长恰好是三个

连续的自然数，所以 $m=3$．此时抛物线方程为 $y^2=-12x$， $F_1(-3,0),P(-2,2\sqrt{6})$，则

直线 PQ 的方程为 $y=2\sqrt{6}(x+3)$．联立 $\begin{cases}y=2\sqrt{6}(x+3)\\ y^2=-12x\end{cases}$，得 $x_1=-\frac{9}{2}$ 或 $x_1=-2$（舍去），

于是 $Q\left(-\frac{9}{2},-3\sqrt{6}\right)$．所以 $|PQ|=\sqrt{\left(-2+\frac{9}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{6}+3\sqrt{6}\right)^2}=\frac{25}{2}$，

设 $M\left(-\frac{t^2}{12},t\right)\left(t\in\left(-3\sqrt{6},2\sqrt{6}\right)\right)$ 到直线 PQ 的距离为 d，则 $d=\frac{\sqrt{6}}{30}\times\left|\left(t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\frac{75}{2}\right|$，

当 $t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时， $d_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{30}\times\frac{75}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{4}$，所以 ΔMPQ 的面积最大值为

$\frac{1}{2}\times\frac{25}{2}\times\frac{5\sqrt{6}}{4}=\frac{125\sqrt{6}}{16}$．此时 $MP:y=-\frac{4}{3}\sqrt{6}x+\frac{2}{3}\sqrt{6}$．

21、（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\frac{1}{e}+\frac{a}{x}=\frac{x+ae}{ex}$， 曲线 $y=f(x)$ 在点

(x_0,y_0) 处的切线方程为 $y=\frac{2}{e}x$．由题意得 $\begin{cases}\frac{1}{e}+\frac{a}{x_0}=\frac{2}{e},\\ \frac{2}{e}x_0=\frac{x_0}{e}+a\ln x_0\end{cases}$ 解得 $a=1$，

$x_0=e$.所以 a 的值为 1.

（2）当 $a=-1$ 时， $f(x)=\frac{x}{e}-\ln x$，则 $f'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}=\frac{x-e}{ex}$，由 $f'(x)>0$，得 $x>e$，

由 $f'(x)<0$，得 $0<x<e$，则 $f(x)$ 有最小值为 $f(e)=0$， 即 $f(x)$ 0，所以

$g(x)=\frac{x}{e}-\ln x-\frac{\ln x}{x}+b$，$(x>0)$， 由已知可得函数 $y=\ln x+\frac{\ln x}{x}-\frac{x}{e}$ 的图象与直线 $y=b$ 有两个交点，

设 $h(x)=\ln x+\frac{\ln x}{x}-\frac{x}{e}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1}{e}=\frac{ex+e-e\ln x-x^2}{ex^2}$，

令 $\varphi(x)=ex+e-e\ln x-x^2$，$\varphi'(x)=e-\frac{e}{x}-2x=\frac{ex-e-2x^2}{x}$，

由 $ex-e-2x^2<0$，可知 $\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

由 $\varphi(e)=0$，得 $0<x<e$ 时，$\varphi(x)>0$，当 $x>e$ 时，$\varphi(x)<0$，

即当 $0<x<e$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，

则函数 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上为增函数，在 $(e,+\infty)$ 上为减函数，

所以，函数 $h(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值 $h(e)=\frac{1}{e}$，

又 $h(1)=-\frac{1}{e}$，$h(e^3)=3+\frac{3}{e^3}-e^2<4-e^2<-1<-\frac{1}{e}$，

所以，当函数 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有两个零点时，b 的取值范围是 $-\frac{1}{e}\quad b<\frac{1}{e}$，

即 $b\in\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

22、(1)由题意可知：直线 l 的普通方程为 $x+y+1=0$，$\therefore A(-1,0)$，$B(0,-1)$ C_1 的方程可化为 $x^2+y^2=1(y\ge 0)$，设点 P 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$，$0\le\theta\le\pi$，

$\therefore \overline{BA}\cdot\overline{BP}=-\cos\theta+\sin\theta+1=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\in\left[0,\sqrt{2}+1\right]$

(2)曲线 C_2 的直角坐标方程为：$(x+2)^2+(y-2)^2=8$ 直线 l 的标准参数方程为

$\begin{cases}x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}m\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}m\end{cases}$ (m 为参数)，代入 C_2 得：$m^2-\sqrt{2}m-7=0$ 设 M,N 两点对应的参数分别为

m_1,m_2

$m_1+m_2=\sqrt{2},m_1m_2=-7<0$ 故 m_1,m_2 异号 $\therefore \left||QM|-|QN|\right|=|m_1+m_2|=\sqrt{2}$

23、答案：（1）当$m=-2$时，$f(x)=|2x|+|2x+3|-2=\begin{cases}4x+1(x\ge 0)\\1(-\frac{3}{2}<x<0)\\-4x-5(x\le -\frac{3}{2})\end{cases}$

当$\begin{cases}4x+1\le 3\\x\ge 0\end{cases}$解得$0\le x\le \frac{1}{2}$当$-\frac{3}{2}<x<0,1\le 3$恒成立.

当$\begin{cases}-4x-5\le 3\\x\le -\frac{3}{2}\end{cases}$ 解得$-2\le x\le -\frac{3}{2}$，此不等式的解集为$[-2,\frac{1}{2}]$.

（2）$f(x)=|2x|+|2x+3|+m=\begin{cases}4x+3+m(x\ge 0)\\3+m(-\frac{3}{2}<x<0)\\-4x-3+m(x\le -\frac{3}{2})\end{cases}$，

当$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)=|2x|+|2x+3|+m=\begin{cases}3+m(-\frac{3}{2}<x<0)\\-4x-3+m(x\le -\frac{3}{2})\end{cases}$

当$-\frac{3}{2}<x<0$时，$f(x)=3+m$，当$x\le -\frac{3}{2},f(x)=-4x-3+m$单调递减，

$\therefore f(x)$的最小值为$3+m$

设$g(x)=x+\frac{2}{x}(x<0)$

当$-x>0,-x+\frac{2}{-x}\ge 2\sqrt{2}$，当且仅当$-x=\frac{2}{-x}$时，取等号$\therefore x+\frac{2}{x}\le -2\sqrt{2}$

即$x=-\sqrt{2}$时，$g(x)$取得最大值$-2\sqrt{2}$.

要使$f(x)\ge x+\frac{2}{x}$恒成立，只需$m+3\ge -2\sqrt{2}$，即$m\ge -2\sqrt{2}-3$.

自主招生在线创始于 2014 年，是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html