绝密★启用前（全国卷）

文科数学参考答案

1．【答案】B

【解析】$z=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$，$\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$，$|\bar{z}-\mathrm{i}|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2．【答案】D

【解析】$M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|-2<x<2\}$，所以$M\cap N=\{x|-1<x<2\}$.

3．【答案】D

【解析】甲、乙的平均数都是 8，故 A 错误；甲的中位数是 7.5，而乙的中位数是 8，故 B 错误；乙的众数是 8，故 C 错误；乙的方差小，所以乙的成绩更稳定，故 D 正确.

4．【答案】A

【解析】因为$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为单位向量，所以$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=5-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

5．【答案】C

【解析】因为$\sin x=\frac{3}{5}$，其中$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以$\cos x=-\frac{4}{5}$，$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{3}{4}$，

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=-\frac{24}{7}$，所以$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan 2x-1}{1+\tan 2x}=\frac{31}{17}$.

6．【答案】D

【解析】$2^a=3.9^b<4^b=2^{2b}$，因为函数$y=2^x$单调递增，所以$2b>a$.

7．【答案】D

【解析】只有当$a\perp b$时才存在平面α，β，使$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且$c\,//\,\alpha$，$c\,//\,\beta$，$\alpha\perp\beta$，故 A 错误；若存在平面α，β，使$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且$c\,//\,\alpha$，$c\,//\,\beta$，则此时α与β不平行，故 B 错误；存在两个平面γ，使$c\subset\gamma$，且a，b与γ所成角相等，故 C 错误；存在平面γ，使$a\,//\,\gamma$，$b\,//\,\gamma$，且$c\perp\gamma$，故 D 正确.

8．【答案】C

【解析】当列车行驶的距离为s时，车轮转过的角度为$\frac{s}{R}$，此时P到铁轨上表面的距离为$R-R\cos\frac{s}{R}=R(1-\cos\frac{s}{R})$.

9．【答案】B

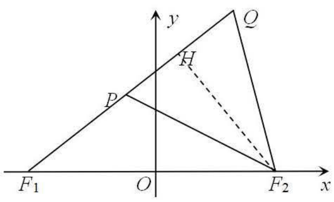
【解析】圆心坐标为$(2,2)$，半径为2，因为l将该圆分成的两段弧长之比为$2:1$，则两段弧所对的圆心角分别为$\frac{4\pi}{3}$和$\frac{2\pi}{3}$，由几何性质可知，圆心到l的距离为1，设l的方程为$y=kx$，则$\frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，$k=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$.

10.【答案】D

$S_7=7a_4<0$，$a_4<0$，因为$a_7>0$，所以a_5，a_6的符号不确定，而$a_3<0$，$a_8>0$，所以a_3+a_6，a_5+a_8的符号不确定；$S_7-S_4=a_5+a_6+a_7=3a_6$，若$a_6<0$，则$S_7<S_4$，.设公差为d，则$d>0$，所以$S_{14}-3a_9=7(a_7+a_8)-3a_9=11a_7+d>0$.

11.【答案】B

【解析】如图，设$|PF_1|=|PQ|=m$，由双曲线的定义可知$|QF_2|=2m-2a$，$|PF_2|=m+2a$，显然$|PQ|\neq|PF_2|$若$|PQ|=|QF_2|$，即$m=2m-2a$，则$m=2a$，$|PQ|=|QF_2|=2a$，$|PF_2|=4a$，$|PQ|+|QF_2|=|PF_2|$，不合题意；若$|PF_2|=|QF_2|$，即$m+2a=2m-2a$，则$|PQ|=m=4a$，$|PF_2|=|QF_2|=6a$，满足条件.过F_2作$F_2H\perp PQ$，垂足为H，则H为线段PQ的中点，由几何关系可知$|F_1H|=6a$，$|F_2H|^2=32a^2$，设C的焦距为$2c$，由几何关系可知$|F_1F_2|^2=|F_1H|^2+|F_2H|^2$，所以$c=\sqrt{17}a$，所以$C$的离心率为$\sqrt{17}$.



12.【答案】A

【解析】设三棱台为$ABC-A_1B_1C_1$，其中$\triangle ABC$是下底面，$\triangle A_1B_1C_1$是上底面，点O，O_1分别为$\triangle ABC$，$\triangle A_1B_1C_1$的中心，则$OO_1=\sqrt{3}$，$OA=2$，$O_1A_1=1$，$\triangle OAA_1$为边长为2的等边三角形，该球的球心O'为线段AA_1的一条垂直平分线与OO_1的交点，由几何关系可知O'与O重合，所以球半径$R=OA=2$，所以体积为$\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{32\pi}{3}$.

13.【答案】4

【解析】因为$f(x)$是定义域为$\mathbf{R}$的奇函数，且$f(1)+f(-3)=0$，所以$f(1)=f(3)$，因为当$x>0$时，$f(x)=x^2+ax$，所以$x=2$是$y=x^2+ax$图像的对称轴，所以$a=-4$，即当$x>0$时，$f(x)=x^2-4x$，$f(2)=-4$，所以$f(-2)=-f(2)=4$.

14.【答案】$3[1-(\frac{2}{3})^n]$

【解析】因为$\frac{1}{2}S_n=(\frac{3}{2})^n-1$，所以$a_1=S_1=1$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(\frac{3}{2})^{n-1}$，所以对于$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=(\frac{3}{2})^{n-1}$，所以$\frac{1}{a_n}=(\frac{2}{3})^{n-1}$，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=3[1-(\frac{2}{3})^n]$.

15.【答案】$\frac{5}{3}$

【解析】**方法1**：多面体A_1C_1-AEFC的体积等于三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积与三棱台$EBF-A_1B_1C_1$的体积之差，其中三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为4，三棱台$EBF-A_1B_1C_1$的体积为$\frac{7}{3}$，所以多面体A_1C_1-AEFC的体积为$\frac{5}{3}$.

方法2：所求体积为$V_{A_1-AEF}+V_{F-ACC_1A_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot AA_1+\frac{1}{3}S_{ACC_1A_1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$.

16.【答案】$4\sqrt{2}$

【解析】设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$F(1,0)$，显然当直线AB垂直于x轴时，D与F重合，此时$|OD|=1$不满足条件，所以可设直线AB的方程为$y=k(x-1)$，代入C的方程有，$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$，所以$x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$，$x_1x_2=1$，$D(\frac{k^2+2}{k^2},\frac{2}{k})$，所以$|OD|^2=13=(1+\frac{2}{k^2})^2+\frac{4}{k^2}$，解得$k^2=1$，$x_1+x_2=6$，由抛物线的几何性质可知$|AF|=x_1+1$，$|BF|=x_2+1$，所以$||AF|-|BF||=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{2}$.

17.（12分）

【解析】(1) 设内角A，B，C的对边分别为a，b，c，

由正弦定理可知$2a=c$， ……1分

由余弦定理可知$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{5a^2-b^2}{4a^2}=\frac{11}{16}$. ……3分

解得$b=\frac{3}{2}a$， ……4分

又因为$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$， ……5分

所以由正弦定理可知$\sin A=\frac{2}{3}\sin B=\frac{\sqrt{15}}{8}$. ……6分

（2）由（1）可知，$AD=\frac{1}{2}AB=a$，

由余弦定理可知$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos A=\frac{5}{8}a^2=5$， ……8 分

所以$a=2\sqrt{2}$，$AB=2a=4\sqrt{2}$， ……10 分

所以由（1）及三角形面积公式可知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sin B\cdot AB\cdot BC=\frac{3\sqrt{15}}{2}$． ……12 分

18.（12 分）

【解析】（1）根据列联表得：$K^2=\frac{180\times(45\times30-60\times45)^2}{90\times90\times105\times75}=\frac{36}{7}\approx5.143<6.635$， ……4 分

所以没有 99%的把握认为学生每周平均运动时长与性别有差异. ……5 分

（2）男生中每周平均运动时长不少于 7 小时的比率为$p_1=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$， ……6 分

女生中每周平均运动时长不少于 7 小时的比率为$p_2=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$， ……7 分

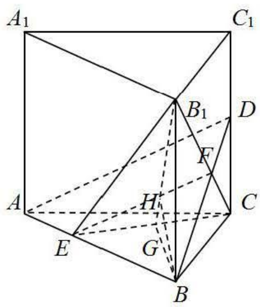
所以全校学生中运动时长不少于 7 小时的人数为$800\times\frac{1}{2}+600\times\frac{1}{3}=600$人， ……10 分

所以全校学生中运动时长不少于 7 小时的占比为$\frac{600}{1400}\approx42.9\%$，高于 40%， ……11 分

所以该校为体育运动达标校. ……12 分

19.（12 分）

【解析】（1）如图，连接BD交B_1C于点F，连接EF，



因为四边形BCC_1B_1为矩形，且D为CC_1的中点，

所以$\frac{BF}{DF}=\frac{BB_1}{CD}=2$， ……1 分

又因为$BE=2AE$，

所以$\frac{BF}{DF}=\frac{BE}{AE}=2$，$EF\,//\,AD$， ……3 分

因为$EF\subset$平面B_1CE，$AD\not\subset$平面B_1CE，

所以$AD\,//$平面B_1CE． ……5 分

（2）易知点D到平面B_1CE的距离等于点B到平面B_1CE的距离的一半， ……6 分

过B作$BG\perp CE$，垂足为G， ……7 分

连接B_1G，过B作$BH\perp B_1G$，垂足为H，

因为$BB_1\perp$平面ABC，$CE\subset$平面ABC，

所以$BB_1\perp CE$，

又因为$BG\cap BB_1=B$，$BG\subset$平面BB_1G，$BB_1\subset$平面BB_1G，$BH\subset$平面BB_1G，

所以 $CE\perp$ 平面 BB_1G， $CE\perp BH$， ……9 分

所以 $BH\perp$ 平面 B_1CE，即线段 BH 为点 B 到平面 B_1CE 的距离. ……10 分

因为 $\angle ABC=90^\circ$， $BE=\dfrac{2}{3}AB=4$， $BC=3$，

所以 $CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=5$，

由几何关系可知 $BG\cdot CE=BE\cdot BC$，

所以 $BG=\dfrac{12}{5}$， $B_1G=\sqrt{BG^2+BB_1^2}=\dfrac{6\sqrt{29}}{5}$， ……11 分

由几何关系可知 $BH\cdot B_1G=BG\cdot BB_1$，

所以 $BH=\dfrac{12\sqrt{29}}{29}$，故点 D 到 B_1CE 的距离为 $\dfrac{6\sqrt{29}}{29}$. ……12 分

20.（12 分）

【解析】(1) 当 $a=0$ 时， $f(x)=2e^x-x-x^2$，

所以 $f'(x)=2e^x-1-2x$， ……2 分

设 $g(x)=f'(x)$， 则 $g'(x)=2e^x-2$，

当 $x<0$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，当 $x>0$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

所以 $f'(x)=g(x)\geqslant g(0)=1>0$， ……4 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,+\infty)$， $f(x)$ 没有单调递减区间. ……5 分

(2) 根据题意有 $f'(x)=2e^x-1-2x-a\cos x$，

若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(0)=2-1-0-a=0$，即 $a=1$， ……6 分

当 $a=1$ 时， $f'(x)=2e^x-1-2x-\cos x$，

设 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=2e^x-2+\sin x$， ……7 分

当 $x\in(0,\pi)$ 时， $\sin x>0$， $e^x>1$， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增，

所以当 $x\in(0,\pi)$ 时， $f'(x)=h(x)>h(0)=0$， $f(x)$ 单调递增， ……9 分

当 $x\in(-\pi,0)$ 时， $\sin x<0$， $e^x<1$， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减，

所以当 $x\in(-\pi,0)$ 时， $f'(x)=h(x)>h(0)=0$， $f(x)$ 单调递增， ……11 分

所以 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点. ……12 分

21.（12 分）

【解析】（1）根据题意有，$B(0,1)$，设 $F(c,0)$，

因为 $P(2,1)$，故 $BP\,//\,x$ 轴， ……1 分

且当 $|PF|=|BF|$ 时，F 在线段 BP 的垂直平分线 $x=1$ 上， ……2 分

所以 $c=1$， ……3 分

根据椭圆的几何性质可知 $a^2=1+c^2=2$，

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……4 分

（2）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，当 $MN\perp x$ 轴时，显然 BM 与 BN 不垂直. ……5 分

当 MN 与 x 轴不垂直时，设 MN 的方程为 $y=k(x-1)$，代入 C 的方程有：

$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$， ……6 分

$\overrightarrow{BM}=(x_1,y_1-1)$，$\overrightarrow{BN}=(x_2,y_2-1)$，当 $BM\perp BN$ 时，$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=0$，

整理有 $(1+k^2)x_1x_2-k(k+1)(x_1+x_2)+(k+1)^2=0$， ……7 分

将 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$ 代入上式有 $\dfrac{2(1+k^2)(k^2-1)}{1+2k^2}-\dfrac{4k^3(k+1)}{1+2k^2}+(k+1)^2=0$，

整理并化简有 $3k^2+2k-1=0$， ……8 分

解得 $k=\dfrac{1}{3}$ 或 $k=-1$.

当 $k=-1$ 时，MN 的方程为 $y=-x+1$，此时直线过点 B，不合题意， ……9 分

当 $k=\dfrac{1}{3}$ 时，MN 的方程为 $x-3y-1=0$，$x_1+x_2=\dfrac{4}{11}$，$x_1x_2=-\dfrac{16}{11}$，

点 $P(2,1)$ 到 MN 的距离为 $d=\dfrac{|2-3-1|}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$， ……10 分

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{20\sqrt{2}}{11}$， ……11 分

所以 $S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}d\cdot|MN|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{20\sqrt{2}}{11}=\dfrac{4\sqrt{5}}{11}$. ……12 分

22.【解析】(10 分)

（1）C 的普通方程为 $(y+2)^2=4x$， ……2 分

其中 $x\geqslant 1$，$y\geqslant 0$． ……3 分

$\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=1=\sqrt{2}\rho\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\rho\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=y-x=1$．

所以 l 的直角坐标方程为 $y=x+1$． ……5 分

（2）设 C 上的点到 l 距离为 d，由（1）可知，

$$d=\frac{\left|\frac{1}{4}(t^2+\frac{1}{t^2})^2-(t-\frac{1}{t})^2+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{1}{4}(t^2+\frac{1}{t^2})^2-(t^2+\frac{1}{t^2})+3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|(t^2+\frac{1}{t^2}-2)^2+8\right|}{4\sqrt{2}}\geqslant\sqrt{2}，$$ ……9 分

当 $t=\pm 1$ 时，等号成立．

所以 C 上的点到 l 距离的最小值为 $\sqrt{2}$． ……10 分

23.【解析】(10 分)

（1）根据题意有 $|1-m+n|\leqslant 1$，$|1+m+n|\leqslant 1$，$f(0)=n$，

所以 $-1\leqslant 1-m+n\leqslant 1$，即 $-2\leqslant -m+n\leqslant 0$，①

$-1\leqslant 1+m+n\leqslant 1$，即 $-2\leqslant m+n\leqslant 0$，② ……2 分

由①可知 $n\leqslant m$， ……3 分

①+②有 $-4\leqslant 2n$，即 $-2\leqslant n$， ……4 分

由①可知，$0\leqslant m-n\leqslant 2$，③

②+③有 $2m\leqslant 2$，即 $m\leqslant 1$，

综上，$-2\leqslant f(0)\leqslant m\leqslant 1$． ……5 分

（2）**方法 1**：由①② 得 $0\leqslant m^2-2mn+n^2\leqslant 4$④，

$0\leqslant m^2+2mn+n^2\leqslant 4$⑤． ……7 分

由④得 $-4\leqslant -m^2-n^2+2mn\leqslant 0$⑥，……8 分

⑤+⑥得 $-4\leqslant 4mn\leqslant 4$，即 $|mn|\leqslant 1$． ……10 分

方法 2：由②，③可知，$(m+n)^2=m^2+n^2+2mn\leqslant 4$，

$(m-n)^2=m^2+n^2-2mn\leqslant 4$， ……6 分

所以 $m^2+n^2\leqslant 4$. ……7 分

且有 $m^2+n^2-4\leqslant 2mn\leqslant 4-(m^2+n^2)$，即 $2|mn|\leqslant 4-(|m|^2+|n|^2)$， ……9 分

所以 $4\geqslant 2|mn|+|m|^2+|n|^2\geqslant 4|mn|$，即 $|mn|\leqslant 1$. ……10 分