绝密★启用前

天一大联考

“顶尖计划”2022届高中毕业班第四次考试

文科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{5}i}{1+3i}$,则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

2. 已知集合 $A=\{y\in\mathbf{N}\mid y=\log_3x,0<x<10\}$,$B=\{x\mid -2<x<2\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0\}$

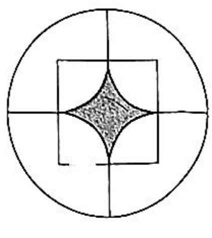
3. 某电器城为应对即将到来的空调销售旺季,批发了一批新型号空调,其中甲品牌60台,乙品牌45台,丙品牌30台,为了确保产品质量,质检员要在这批空调中采用分层抽样的方法,抽取一个容量为 n 的样本进行安全性能检验,若甲品牌空调抽取了12台,则 $n=$

A. 18　　B. 21　　C. 24　　D. 27

4. 已知函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,且 $f(x)=f(x+4)$,当 $x\in(0,2)$ 时,$f(x)=\sqrt{13+3^{x+3}}$,则 $f\left(3+\log_3\dfrac{243}{4}\right)=$

A. -11　　B. -8　　C. $\log_34$　　D. $8-\log_34$

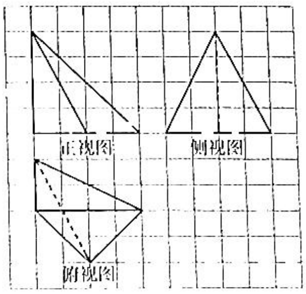
5. 商标是一种信息资源,具有传递信息的功能,同时是企业形象和信誉的集中表现,也是企业的无形资产,是一项重要的知识产权.如图为某企业的商标,其中正方形的边长等于大圆的半径,以正方形的4个顶点为圆心,以正方形边长的一半为半径分别作 $\dfrac{1}{4}$ 圆弧,阴影部分为这4段圆弧围成的封闭区域,现从大圆内随机取一点,则该点取自阴影部分的概率为



A. $\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$　　C. $\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{2}$

6. 如图,网格纸上每个小正方形的边长都为 1,粗的实线和虚线画出的是某几何体的三视图,则该几何体的体积为

A. 2　　B. 4
C. 8　　D. 16



7. 已知 $10^a=\pi$, $5^b=3$, $\log_{10}c=0.01$,则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<c<b$　　B. $b<a<c$
C. $c<a<b$　　D. $a<b<c$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\frac{1}{4}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{2(n+2)}$,则满足 $a_n>\frac{1}{1\,000}$ 的 n 的最大值为

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

9. 已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F,过 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A,B 两点,则 $(|AF|-1)(|BF|-1)$

A. 不是定值,最小值为 1　　B. 为定值 4
C. 不是定值,最大值为 4　　D. 为定值 1

10. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=1$ 有两个相邻的交点 P,Q, $f(x)$ 的图象在 P,Q 之间有一个极大值点 A,若 $AP\perp AQ$,则 $\omega=$

A. $\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

11. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB/\!/CD$, $CD=2AB=4$, $\angle D=60°$, $\angle BCD=45°$,则 $\sin^2\angle DAC=$

A. $\frac{5+2\sqrt{3}}{9}$　　B. $\frac{15+6\sqrt{3}}{26}$　　C. $\frac{5-2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{15-6\sqrt{3}}{13}$

12. 已知函数 $f(x)=e^x-x^2-ax-1$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 0,则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,e-2]$　　B. $(-\infty,e+2]$　　C. $[0,e-2]$　　D. $(-\infty,0]$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $\boldsymbol{a}$ 为单位向量,且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则 $|\boldsymbol{b}|=$ ________.

14. 计算: $\frac{2\cos 20°-\sqrt{2}\cos 25°}{2\sin 25°}=$ ________.

15. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F,离心率为 e,直线 $y=2x$ 与 C 交于 P,Q 两点,且 $\overrightarrow{FP}\perp\overrightarrow{FQ}$,则 $e^2=$ ________.

16. 我国有着丰富悠久的"印章文化",古时候的印章一般用贵重的金属或玉石制成,本是官员或私人签署文件时代表身份的信物,后因其独特的文化内涵,也被作为装饰物来使用. 图 1 是明清时期的一个金属印章摆件,除去顶部的环以后可以看作是一个正四棱柱和一个正四棱锥组成的几何体,如图 2. 已知正四棱柱和正四棱锥的高相等,且底面边长均为 2,若该几何体的所有顶点都在同一个球的表面上,则这个球的表面积为________.

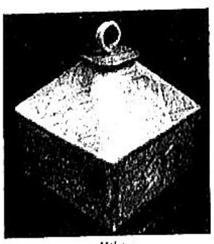


图1

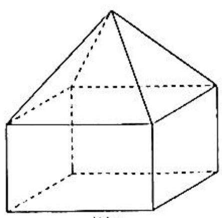


图2

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

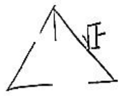
（一）必考题：共 60 分.

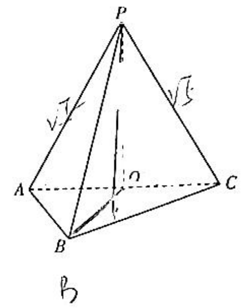
17.（12 分）

如图所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$PA=PC=\sqrt{5}$，$PB=\sqrt{7}$，O 为棱 AC 的中点，点 D 在棱 BC 上，且 $CD=3BD$.

（Ⅰ）证明：平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）求点 C 到平面 POD 的距离.





18.（12 分）

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7=8a_4$，且 $\frac{1}{4}a_2$，a_3-5，a_4-12 成等差数列.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $b_n=\frac{1}{n\log_2 a_n}+\frac{1}{a_{2n-1}}$，证明：数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n<\frac{4}{3}$.

19.（12 分）

受北京冬奥会的影响，更多人开始关注滑雪运动，但由于室外滑雪场需要特殊的气候环境，为了满足日益增长的消费需求，国内出现了越来越多的室内滑雪场. 某投资商抓住商机，在某大学城附近开了一家室内滑雪场. 经过 6 个季度的经营，统计该室内滑雪场的季利润数据如下：

第 x 个季度	1	2	3	4	5	6
季利润 y（万元）	2.2	3.6	4.3	4.9	5.3	5.5

根据上面的数据得到的一些统计量如下：

$\bar{y}$	$\bar{u}$	$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i$	$\sum\limits_{i=1}^{6}u_iy_i$	$\sum\limits_{i=1}^{6}u_i^2$
4.3	0.5	101.4	14.1	1.8

表中 $u_i=\lg x_i$，$\bar{u}=\frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}u_i$.

（Ⅰ）若用方程 $y=a+b\lg x$ 拟合该室内滑雪场的季利润 y 与季度 x 的关系，试根据所给数据求出该方程；

（Ⅱ）利用（Ⅰ）中得到的方程预测该室内滑雪场从第几个季度开始季利润超过 6.5 万元；

（Ⅲ）从这 6 个季度的利润中随机抽取 3 个，求其中恰有 2 个季度利润高于 4.5 万元的概率.

20. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左、右两个顶点分别为 A,B，直线 $y=\frac{b}{a}x$ 与直线 $x=a$ 的交点为 D，且 $\triangle ABD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求 C 的方程；

(Ⅱ)设过 C 的右焦点 F 的直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1k_2=-2$，直线 l_1 交 C 于 M,N 两点，l_2 交 C 于 G,H 两点，线段 MN,GH 的中点分别为 R,S，直线 RS 与 C 交于 P,Q 两点，证明：直线 PQ 过定点.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-ax+a$，$g(x)=(1+a)\ln x-xe^x$，其中 $a>0$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 的极大值为 $a-2$，求 a 的值；

(Ⅱ)若当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2m^2,\\ y=2m\end{cases}$ (m 为参数)，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，直线 l 与 C_1 交于点 P,Q，与 C_2 交于点 S,T，与 x 轴交于点 R.

(Ⅰ)写出曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(Ⅱ)若 $|PR|-|QR|=4(|SR|-|TR|)$，求直线 l 的倾斜角.

23. [选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|2x+3|+|2x-5|$，$g(x)=|x+1|+|x-1|$.

(Ⅰ)求不等式 $f(x)\leqslant 10$ 的解集；

(Ⅱ)若实数 a,b 满足 $a+b=2$，求 $f(a)+g(2b)$ 的最小值.

天一大联考
"顶尖计划"2022 届高中毕业班第四次考试

文科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 B

命题意图 本题主要考查复数模的运算.

解析 $|z|=\dfrac{|\sqrt{5}i|}{|1+3i|}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 答案 C

命题意图 本题主要考查对数的运算、集合的交集运算.

解析 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{x|-2<x<2\}$,所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

3. 答案 D

命题意图 本题主要考查分层抽样.

解析 从 60 台甲品牌空调中抽取了 12 台,所以分层抽样的抽样比为 $\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$,所以 $n=(60+45+30)\times\dfrac{1}{5}=27$.

4. 答案 A

命题意图 本题主要考查根据函数的奇偶性与单调性求函数值.

解析 由题意知 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数,则 $f\left(3+\log_3\dfrac{243}{4}\right)=f(8-\log_3 4)=f(-\log_3 4)=-f(\log_3 4)=-\sqrt{13+3^{\log_3 4+3}}=-11$.

5. 答案 A

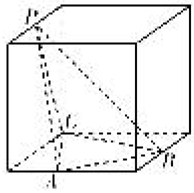
命题意图 本题主要考查几何概型.

解析 设大圆的半径为 R,则大圆的面积为 $S_{大圆}=\pi R^2$,图中四个小扇形组合在一起恰好是一个半径为 $\dfrac{R}{2}$ 的圆,所以阴影部分的面积为 $S_{阴影}=R^2-\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2=\dfrac{(4-\pi)R^2}{4}$,所以该点取自阴影部分的概率为 $P=\dfrac{S_{阴影}}{S_{大圆}}=\dfrac{\frac{(4-\pi)R^2}{4}}{\pi R^2}=\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{4}$.

6. 答案 C

命题意图 本题主要考查空间几何体的三视图及体积.

解析 由三视图知该几何体为一个三棱锥,将其置于一个棱长为 4 的正方体中,则该几何体为图中三棱锥 $P-ABC$,所以 $S_{\triangle ABC}=4\times4-\dfrac{1}{2}\times4\times2-\dfrac{1}{2}\times2\times2-\dfrac{1}{2}\times4\times2=6$. 又因为点 P 到平面 ABC 的距离为 4,所以 $V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times4=\dfrac{1}{3}\times6\times4=8$.



7. 答案　D

命题意图　本题主要考查利用函数的单调性比较大小.

解析　因为 $\pi^2<3.15^2<10$，所以 $a=\lg\pi<\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}$，$\log_5 5>b=\log_5 3>\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，$c=10^{0.1}>1$，所以 $a<b<c$.

8. 答案　B

命题意图　本题主要考查递推数列、累乘法的应用.

解析　因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{2(n+2)}$，所以 $\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\frac{a_5}{a_4}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2\times3}\times\frac{2}{2\times4}\times\frac{3}{2\times5}\times\frac{4}{2\times6}\times\cdots\times\frac{n-1}{2(n+1)}$，即 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}\right)=\frac{1}{2^n}\times\frac{2}{n(n+1)}$，所以 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{n(n+1)\times2^n}$，可知 a_n 关于 n 单调递减. 又 $a_5=\frac{1}{960}>\frac{1}{1\ 000}$，$a_6=\frac{1}{2\ 688}<\frac{1}{1\ 000}$，所以满足 $a_n>\frac{1}{1\ 000}$ 的 n 的最大值为 5.

9. 答案　D

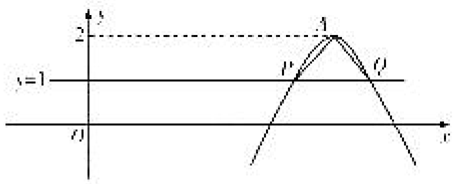
命题意图　本题主要考查直线与抛物线的位置关系.

解析　设过焦点 F 的直线 l 的方程为 $y=kx+1$，则联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$. 由抛物线的定义，得 $|AF|=y_1+1$，$|BF|=y_2+1$，则 $(|AF|-1)(|BF|-1)=y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=-4k^2+4k^2+1=1$，为定值.

10. 答案　C

命题意图　本题主要考查正弦函数的图象与性质.

解析　如图所示，由条件可知 $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形，且 $|PQ|=2$. 令 $2\sin\omega x=1$，则 $\omega x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $\omega x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 P，Q 是相邻的两个交点，且 P，Q 之间存在极大值点，故 $\omega x_Q-\omega x_P=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，即 $\omega\cdot|PQ|=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\omega=\frac{\pi}{3}$.

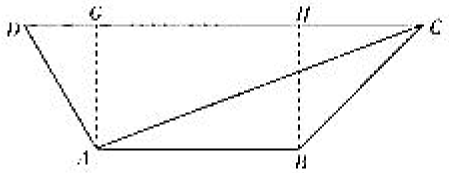


11. 答案　B

命题意图　本题主要考查正弦定理与余弦定理的应用.

解析　如图，分别过点 A，B 作 DC 的垂线，垂足分别为 G，H，则 $AG=BH=HC=\sqrt{3}DG$，$AD=2DG$. 因为 $DC=DG+GH+HC=DG+AB+\sqrt{3}DG=2+(\sqrt{3}+1)DG=4$，所以 $DG=\sqrt{3}-1$，所以 $AD=2\sqrt{3}-2$. 在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AD^2+CD^2-2\times AD\times CD\times\cos D=40-16\sqrt{3}$，所以 $AC=2\sqrt{10-4\sqrt{3}}$，由正弦定理，知

$\frac{DC}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin D}$，所以 $\sin\angle DAC=\frac{DC\sin D}{AC}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{10-4\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10-4\sqrt{3}}}$，所以 $\sin^2\angle DAC=\frac{3}{10-4\sqrt{3}}=\frac{15+6\sqrt{3}}{26}$.



12. 答案　A

命题意图　本题主要考查根据函数的最值求参数的取值范围.

解析　因为 $f(0)=0$，则由题意知，$f(x)=e^x-x^2-ax-1\geq 0$，即 $a\leq\frac{e^x-x^2-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 令 $h(x)=\frac{e^x-x^2-1}{x}$，则 $h'(x)=\frac{x(e^x-2x)-(e^x-x^2-1)}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$. 令 $m(x)=e^x-x-1$，则当 $x>0$ 时，$m'(x)=e^x-1>0$，所以在 $(0,+\infty)$ 上 $m(x)$ 单调递增，所以 $m(x)>m(0)=0$，即 $e^x-x-1>0$，故在 $(0,1)$ 上，$h'(x)<0$；在 $(1,+\infty)$ 上，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(1)=e-2$，所以 $a\leq e-2$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案　2

命题意图　本题主要考查平面向量的数量积运算.

解析　由 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-1\times|\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=0$，解得 $|\boldsymbol{b}|=2$.

14. 答案　$\frac{\sqrt{2}}{2}$

命题意图　本题主要考查两角差的余弦公式.

解析　$\frac{2\cos 20^\circ-\sqrt{2}\cos 25^\circ}{2\sin 25^\circ}=\frac{2\cos(45^\circ-25^\circ)-\sqrt{2}\cos 25^\circ}{2\sin 25^\circ}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 25^\circ\right)-\sqrt{2}\cos 25^\circ}{2\sin 25^\circ}=\frac{\sqrt{2}\sin 25^\circ}{2\sin 25^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. 答案　$5-2\sqrt{5}$

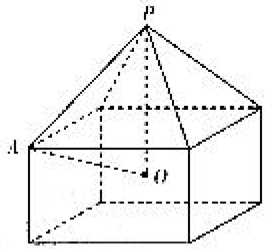
命题意图　本题主要考查双曲线的几何性质、直线与双曲线的位置关系.

解析　设 $F(c,0)(c>0)$，$P(x_0,2x_0)$，则 $Q(-x_0,-2x_0)$. 由 $\begin{cases}y=2x,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 可得 $x^2=x_0^2=\frac{a^2b^2}{b^2-4a^2}$. 因为 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=(x_0-c,2x_0)\cdot(-x_0-c,-2x_0)=c^2-5x_0^2=0$，所以 $c^2-\frac{5a^2b^2}{b^2-4a^2}=0$，整理得 $e^4-10e^2+5=0$，因为 $e>1$，可得 $e^2=5+2\sqrt{5}$.

16. 答案　9π

命题意图　本题主要考查多面体的外接球问题的有关计算.

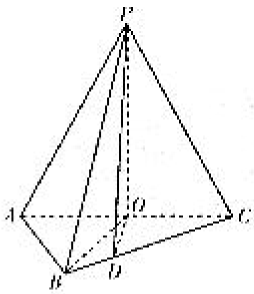
解析　如图，设该几何体的外接球的球心为 O，正四棱柱和正四棱锥的高为 h，根据题意，球 O 即长方体的外接球，则其半径为 $R=\frac{\sqrt{2^2+2^2+h^2}}{2}=\frac{\sqrt{8+h^2}}{2}$，又 $OP=R=\frac{3}{2}h$，所以 $\frac{\sqrt{8+h^2}}{2}=\frac{3}{2}h$，解得 $h=1$，所以 $R=\frac{3}{2}$，球 O 的表面积为 $4\pi R^2=9\pi$.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题主要考查空间位置关系的推理与证明，以及点到平面的距离的计算.

解析　（Ⅰ）如图，连接 OB.



因为 $PA=PC$，O 是 AC 的中点，所以 $PO\perp AC$. ……………………………………………（1 分）

所以 $PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=2$. ……………………………………………………………………（2 分）

在等边 $\triangle ABC$ 中，可得 $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{3}$. ……………………………………（3 分）

因为 $PO^2+BO^2=PB^2$，所以 $PO\perp BO$. ……………………………………………………（4 分）

又因为 $BO\cap AC=O$，所以 $PO\perp$ 平面 ABC. ……………………………………………（5 分）

因为 $PO\subset$ 平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC. ……………………………………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $PO\perp$ 平面 ABC，又 $PO\subset$ 平面 POD，所以平面 $POD\perp$ 平面 ABC，

要求点 C 到平面 POD 的距离，只需在平面 ABC 中计算点 C 到直线 OD 的距离. ……………（7 分）

由条件知 $OC=1$，$CD=\frac{3}{2}$，$\angle ACB=60°$，

所以 $OD=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，……………………………………（9 分）

$S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，………………………………………………（10 分）

设点 C 到直线 OD 的距离为 d，则 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}d=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. ………………………………（11 分）

解得 $d=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，即点 C 到平面 POD 的距离为 $\frac{3\sqrt{21}}{14}$. ……………………………（12 分）

18. **命题意图**　本题主要考查等差数列与等比数列的性质，数列求和.

解析　（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由 $a_7=8a_4$，得 $a_4q^3=8a_4$，所以 $q=2$. ………………………………………………（2 分）

因为 $\frac{1}{4}a_2,a_3-5,a_4-12$ 成等差数列，所以 $2(a_3-5)=\frac{1}{4}a_2+a_4-12$，…………………（3 分）

即 $8a_1-10=\frac{1}{2}a_1+8a_1-12$，解得 $a_1=4$. ……………………………………………（4 分）

因此 $a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$. …………（6分）

（Ⅱ）因为 $b_n=\frac{1}{n\log_2 a_n}+\frac{1}{a_{2n-1}}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^{2n}}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{4^n}$，…………（7分）

所以 $T_n=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$ …………（10分）

因为 $1-\frac{1}{n+1}<1$，$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right)<\frac{1}{3}$，所以 $T_n<\frac{4}{3}$. …………（12分）

19. **命题意图** 本题主要考查回归方程，古典概型的概率计算.

解析 （Ⅰ）由 $u=\lg x$，先求 y 关于 u 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}u$.

由已知数据得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}u_iy_i-6\bar{u}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{6}u_i^2-6\bar{u}^2}=\frac{14.1-6\times0.5\times4.3}{1.8-6\times0.5\times0.5}=4$，…………（2分）

故 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{u}=4.3-4\times0.5=2.3$，…………（3分）

所以 y 关于 u 的回归方程为 $\hat{y}=2.3+4u$，

故 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=2.3+4\lg x$. …………（4分）

（Ⅱ）令 $2.3+4\lg x>6.5$，得 $\lg x>1.05$，…………（5分）

所以 $x>10^{1.05}\approx10\times1.12=11.2$，…………（6分）

故预测从第12个季度开始季利润超过6.5万元. …………（7分）

（Ⅲ）从6个季度中抽取3个的基本事件有：(1,2,3)，(1,2,4)，(1,2,5)，(1,2,6)，(1,3,4)，(1,3,5)，(1,3,6)，(1,4,5)，(1,4,6)，(1,5,6)，(2,3,4)，(2,3,5)，(2,3,6)，(2,4,5)，(2,4,6)，(2,5,6)，(3,4,5)，(3,4,6)，(3,5,6)，(4,5,6)，共20个，…………（9分）

其中恰有2个季度利润高于4.5万元的基本事件有：(1,4,5)，(1,4,6)，(1,5,6)，(2,4,5)，(2,4,6)，(2,5,6)，(3,4,5)，(3,4,6)，(3,5,6)，共9个，…………（11分）

所以所求概率为 $P=\frac{9}{20}$. …………（12分）

20. **命题意图** 本题主要考查椭圆的方程，直线与椭圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）由题意离心率为 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. ① …………（1分）

由 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\ x=a,\end{cases}$ 知 $D(a,b)$，…………（2分）

由△ABD 的面积为 $2\sqrt{3}$，得 $\frac{1}{2}\times2a\times b=2\sqrt{3}$，得 $ab=2\sqrt{3}$. ② …………（3分）

由①②解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$ …………（4分）

所以 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………

（Ⅱ）由题意知 $F(1,0)$，$l_1: y=k_1(x-1)$，$l_2: y=k_2(x-1)$，

联立方程 $\begin{cases} y=k_1(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(4k_1^2+3)x^2-8k_1^2x+4k_1^2-12=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8k_1^2}{4k_1^2+3}$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4k_1^2}{4k_1^2+3}$，……………………（6 分）

代入直线 l_1 的方程得 $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{-3k_1}{4k_1^2+3}$，所以 $R\left(\dfrac{4k_1^2}{4k_1^2+3},\dfrac{-3k_1}{4k_1^2+3}\right)$，

同理得 $S\left(\dfrac{4k_2^2}{4k_2^2+3},\dfrac{-3k_2}{4k_2^2+3}\right)$．……………………（7 分）

①当直线 PQ 的斜率存在时，设直线 $PQ: y=mx+n$，

将点 R,S 的坐标代入，得 $\begin{cases}(4m+4n)k_1^2+3k_1+3n=0, \\ (4m+4n)k_2^2+3k_2+3n=0,\end{cases}$

易知 k_1,k_2 为方程 $(4m+4n)k^2+3k+3n=0$ 的两个根，

则 $k_1\cdot k_2=\dfrac{3n}{4m+4n}=-2$，得 $n=-\dfrac{8}{11}m$，

所以直线 $PQ: y=mx-\dfrac{8}{11}m=m\left(x-\dfrac{8}{11}\right)$，所以直线 PQ 过定点 $E\left(\dfrac{8}{11},0\right)$．……………………（9 分）

②当直线 PQ 的斜率不存在时，由对称性可知 $k_1=-k_2$，

因为 $k_1k_2=-2$，不妨设 $k_1=\sqrt{2}$，$k_2=-\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{4k_1^2}{4k_1^2+3}=\dfrac{4k_2^2}{4k_2^2+3}=\dfrac{8}{11}$，

即直线 $PQ: x=\dfrac{8}{11}$，满足过定点 $E\left(\dfrac{8}{11},0\right)$．……………………（11 分）

所以直线 PQ 过定点．……………………（12 分）

21．**命题意图**　本题主要考查函数极值与导数的关系、导数在不等式证明中的应用．

解析　（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$．……………………（1 分）

因为 $a>0$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{1}{a}$；由 $f'(x)<0$，得 $x>\dfrac{1}{a}$，……………………（3 分）

所以 $f(x)_{极大值}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a-1+a$，……………………（4 分）

所以 $-\ln a-1+a=a-2$，解得 $a=e$．……………………（5 分）

（Ⅱ）当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，即 $xe^x-ax+a-a\ln x\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立．……………………（6 分）

令 $h(x)=xe^x-ax+a-a\ln x$，

$h'(x)=(x+1)e^x-a-\dfrac{a}{x}=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)(xe^x-a)$，……………………（7 分）

易知当 $x>0$ 时，$y=xe^x$ 单调递增，且值域为 $(0,+\infty)$，

故存在 $x_0>0$，满足 $x_0e^{x_0}=a$，即 $x_0+\ln x_0=\ln a$．……………………（8 分）

则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{min}=h(x_0)=x_0e^{x_0}-a(x_0+\ln x_0)+a=2a-a\ln a$．……………………（10 分）

由题意知 $h(x)_{min}\geqslant 0$，得 $2a-a\ln a\geqslant 0$．……………………（11 分）

因为 $a>0$，所以 $0<a\leqslant e^2$，

即 a 的取值范围为 $(0,e^2]$. ……………………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题主要考查参数方程化普通方程、极坐标方程与直角坐标方程间的转化、直线与圆锥曲线间的位置关系、参数的几何意义的应用.

解析 （Ⅰ）曲线 C_1 的普通方程为 $y^2=2x$. ……………………………………………………（2 分）

由 $\rho=2\cos\theta$ 得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$.

所以 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）不妨设 $0<\alpha<\pi$，则 $\sin\alpha>0$. 易知 $R\left(\frac{1}{2},0\right)$ 是 l 过的定点.

将直线 l 的参数方程代入 C_1：$y^2=2x$，整理得 $t^2\sin^2\alpha-2t\cos\alpha-1=0$，

设 P,Q 对应的参数分别为 t_P,t_Q，则 $|PR|-|QR|=t_P+t_Q=\frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$. ……………………………（6 分）

将直线 l 的参数方程代入 C_2：$(x-1)^2+y^2=1$，得 $t^2-t\cos\alpha-\frac{3}{4}=0$，

设 S,T 对应的参数分别为 t_S,t_T，则 $|SR|-|TR|=t_S+t_T=\cos\alpha$. ……………………………（8 分）

由 $|PR|-|QR|=4(|SR|-|TR|)$ 得 $\frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=4\cos\alpha$，

得 $\cos\alpha=0$ 或 $\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，……………………………………………………………（9 分）

所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$. ……………………………………………………（10 分）

23. **命题意图** 本题主要考查绝对值不等式的解法，绝对值不等式的性质.

解析 （Ⅰ）由 $f(x)\leqslant 10$，得 $|2x+3|+|2x-5|\leqslant 10$.

$\begin{cases}x<-\frac{3}{2},\\-(2x+3)-(2x-5)\leqslant 10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2},\\(2x+3)-(2x-5)\leqslant 10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>\frac{5}{2},\\(2x+3)+(2x-5)\leqslant 10.\end{cases}$ ……………（3 分）

解得 $-2\leqslant x<-\frac{3}{2}$，或 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$，或 $\frac{5}{2}<x\leqslant 3$. ……………………………（4 分）

所以不等式 $f(x)\leqslant 10$ 的解集为 $[-2,3]$. ………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）因为 $a+b=2$，所以 $b=2-a$. …………………………………………………………（6 分）

$f(a)+g(2b)=|2a+3|+|2a-5|+|2b+1|+|2b-1|$

$=|2a+3|+|2a-5|+|5-2a|+|3-2a|$

$\geqslant|(2a+3)-(2a-5)|+|(5-2a)-(3-2a)|$ ……………………………………（8 分）

$=8+2=10$. ……………………………………………………………………（9 分）

当且仅当 $\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$ 时，等号成立.

所以 $f(a)+g(2b)$ 的最小值为 10. ……………………………………………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。