"皖南八校"2021 届高三第一次联考

数 学(文科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。第Ⅰ卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；第Ⅱ卷请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语，函数、导数及其应用，三角函数、解三角形，平面向量与复数。

第Ⅰ卷(选择题 共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|3^x\leqslant 9\}$，则 $A\cup B=$

A. $\mathbf{R}$　　B. $(-2,3)$　　C. $(-2,2]$　　D. $(-\infty,3)$

2. 已知复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(-1,2)$，则复数 $z(1-i)$ 的虚部为

A. -3　　B. 3　　C. $-3i$　　D. $3i$

3. 下列四个条件中，使 $x>y$ 成立的充分而不必要条件是

A. $x>y+1$　　B. $x>y-1$

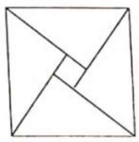
C. $x^2>y^2$　　D. $x^3>y^3$

4. 设向量 $\boldsymbol{a}=(0,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，则

A. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　　B. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$　　D. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$

5. 第 24 届国际数学家大会会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础进行设计的. 如图所示，赵爽弦图是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形. 如果小正方形的面积为 1，大正方形的面积为 25，直角三角形中较小的锐角为 θ，那么 $\cos 2\theta=$



A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $-\frac{7}{25}$

6. 已知函数 $f(x)=\log_2 x+\sqrt{16-4^x}$，则函数 $f(x)$ 的定义域为

A. $(-\infty,4]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(0,2]$　　D. $(0,4]$

7. 要得到函数 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需将函数 $g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象

A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度

8. 某特种冰箱的食物保鲜时间 y（单位：小时）与设置储存温度 x（单位：℃）近似满足函数关系 $y=3^{kx+b}$（k,b 为常数），若设置储存温度 0℃ 的保鲜时间是 288 小时，设置储存温度 5℃ 的保鲜时间是 144 小时，则设置储存温度 15℃ 的保鲜时间近似是

A. 36 小时　　B. 48 小时　　C. 60 小时　　D. 72 小时

9. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是不共线的向量，$\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，若 A、B、C 三点共线，则实数 λ,μ 满足

A. $\lambda=\mu-5$　　B. $\lambda=\mu+5$　　C. $\lambda=\mu-1$　　D. $\lambda=\mu+1$

10. 已知函数 $f(x)=2^x+x-1$，$g(x)=\log_2 x+x-1$，$h(x)=\sin x+x-1$ 的零点依次为 x_1,x_2,x_3，则以下大小关系正确的是

A. $x_1<x_2<x_3$　　B. $x_1<x_3<x_2$

C. $x_3<x_2<x_1$　　D. $x_2<x_3<x_1$

11. 已知函数 $f(x)=(\frac{3}{2}x^2-3x)\cdot e^x$，则

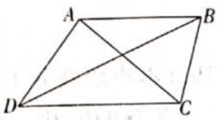
A. 函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x=\sqrt{2}$

B. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 上单调递减

C. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有 3 个零点

D. 函数 $f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=-3x$

12. 如图，地面四个 5G 中继站 A、B、C、D，已知 A、B 两个中继站的距离为 $\sqrt{10}$ km，$\angle ADB=\angle CDB=30°$，$\angle DCA=45°$，$\angle ACB=60°$，则 C、D 两个中继站的距离是



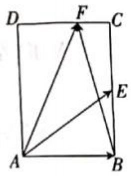
A. $2\sqrt{3}$ km　　B. $2\sqrt{2}$ km　　C. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ km　　D. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ km

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中的横线上.

13. 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 内的可导函数，且 $f(\ln x)=x\ln x$，则 $f'(1)=$________.

14. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在 CD，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=3$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=$________.



15. 已知函数 $f(x)=(x^2+\frac{1}{\pi})^{-2}-e^{|\frac{x}{\pi}|}$，则不等式 $f(x-1)<f(2x-1)$ 的解集是________.

16. 在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c，若满足 $b=4$，$A=60^\circ$ 的三角形仅有一个，则△ABC 面积的取值范围是________.

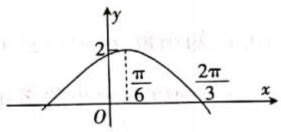
三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $A>0$，$\omega>0$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$x\in\mathbf{R}$，其部分图象如图所示.

(1)求函数 $y=f(x)$ 的解析式；

(2)已知函数 $g(x)=f(x)\cos x$，求函数 $g(x)$ 的单调递增区间.



18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x^2+m}{x}(1\leqslant x\leqslant 4)$，且 $f(1)=5$.

(1)求实数 m 的值，并求函数 $f(x)$ 的值域；

(2)函数 $g(x)=ax-1(-2\leqslant x\leqslant 2)$，若对任意 $x_1\in[1,4]$，总存在 $x_0\in[-2,2]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边，已知 $(\sin A+\sin B)^2-\sin^2C=3\sin A\sin B$.

(1)求角 C；

(2)若 $b=4$，且△ABC 为锐角三角形，求△ABC 面积的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\frac{1}{a+bx}(a,b>0)$.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 $bx+4y-3=0$，求实数 a,b 的值；

(2)在(1)的条件下，若 $2(x-k)f(x)\geqslant \ln x$ 对于 $0<x\leqslant 1$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

某科技公司生产某种芯片. 由以往的经验表明，不考虑其他因素，该芯片每日的销售量 y(单位：枚)与销售价格 x(单位：元/枚，$10<x\leqslant 50$)：当 $10<x\leqslant 30$ 时满足关系式 $y=m(x-30)^2+\frac{n}{x-10}$，($m,n$ 为常数)；当 $30<x\leqslant 50$ 时满足关系式 $y=-70x+4900$. 已知当销售价格为 20 元/枚时，每日可售出该芯片 7000 枚；当销售价格为 30 元/枚时，每日可售出该芯片 1500 枚.

(1)求 m,n 的值，并确定 y 关于 x 的函数解析式；

(2)若该芯片的成本为 10 元/枚，试确定销售价格 x 的值，使公司每日销售该芯片所获利润 $f(x)$ 最大.（x 精确到 0.01 元/枚）

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{e^{-x}}{3}(ax^2+a+1)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $f(x)$ 在$[1,2]$内为减函数，求实数 a 的取值范围；

(2)求函数 $f(x)$ 在$[1,2]$上的最大值.

“皖南八校”2021届高三第一次联考·数学(文科)
参考答案、解析及评分细则

1. D　∵$A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$，∴$A\cup B=(-\infty,3)$.

2. B　由题意，$z=-1+2i$，则 $z(1-i)=(-1+2i)(1-i)=1+3i$. ∴z 的虚部是3.

3. A　∵$x>y+1\Rightarrow x-y>1\Rightarrow x-y>0\Rightarrow x>y$，∴$x>y+1$ 是 $x>y$ 的充分条件.
又∵$x>y\Rightarrow x-y>0 \nRightarrow x>y+1$，∴$x>y+1$ 不是 $x>y$ 的必要条件，
∴$x>y+1$ 是 $x>y$ 成立的充分而不必要条件.
$x>y-1$ 是 $x>y$ 成立的必要而不充分条件；$x^2>y^2$ 是 $x>y$ 成立的既不充分也不必要条件；
$x^3>y^3$ 是 $x>y$ 成立的充要条件.

4. D　因为 $\boldsymbol{a}=(0,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，故A错误；
因为 $\boldsymbol{a}=(0,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,0)$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，故B错误；
又 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，故C错误；
又 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0-0=0$，故D正确.

5. C　设直角三角形的直角边长为 $a,a+1$，则 $a^2+(a+1)^2=25$，$a>0$. 解得 $a=3$.
∴$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$. ∴$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{7}{25}$.

6. C　因为 $f(x)=\log_2 x+\sqrt{16-4^x}$，
所以要使函数有意义需满足 $\begin{cases}x>0\\16-4^x\geqslant 0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x>0\\x\leqslant 2\end{cases}$，即 $0<x\leqslant 2$，所以函数的定义域为 $(0,2]$.

7. A　$f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2})=\sin(2x+\dfrac{5\pi}{6})=\sin[2(x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\pi}{6}]$，故选A.

8. A　由题意得 $\begin{cases}3^b=288\\3^{5k+b}=144\end{cases}$，∴$3^{5k}=\dfrac{144}{288}=\dfrac{1}{2}$，所以 $x=15$ 时，$y=3^{15k+b}=(3^{5k})^3\cdot 3^b=\dfrac{1}{8}\times 288=36$.

9. B　由 $\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，
所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3-\lambda)\boldsymbol{a}-(2+\mu)\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；
若A、B、C三点共线，则 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$，即 $3-\lambda=-(2+\mu)$，化简得 $\lambda=\mu+5$.

10. B　$f(x)=2^x+x-1$，$g(x)=\log_2 x+x-1$，$h(x)=\sin x+x-1$.
故 $2^x=-x+1$，$\log_2 x=-x+1$，$\sin x=-x+1$，作出函数 $y=2^x$，$y=\log_2 x$，$y=\sin x$，$y=-x+1$ 图像，可得 $x_1<x_3<x_2$.

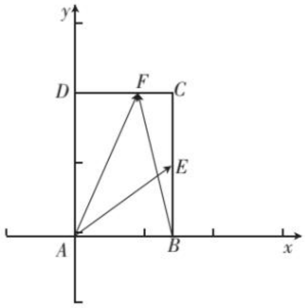
11. D　令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$.
当 $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},+\infty)$；
当 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 的减区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 故B错误.
所以当 $x=-\sqrt{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 有极大值，故A错误.
当 $x<-\sqrt{2}$ 时，$f(x)=(\dfrac{3}{2}x^2-3x)e^x>0$ 恒成立，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 上没有零点；
当 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 上单调递减，且 $f(0)=0$，存在唯一零点；
当 $x>\sqrt{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，且 $f(2)=0$，存在唯一零点.
故函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个零点，故C错误.
函数 $f(x)=(\dfrac{3}{2}x^2-3x)e^x$，得 $f'(x)=3(\dfrac{1}{2}x^2-1)e^x$，则 $f'(0)=-3$；
又 $f(0)=0$，从而曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=-3x$，故D正确.

12. C　在 $\triangle ADC$ 中，$\dfrac{DC}{\sin 75^\circ}=\dfrac{AC}{\sin 60^\circ}$，在 $\triangle BCD$ 中，$\dfrac{DC}{\sin 45^\circ}=\dfrac{BC}{\sin 30^\circ}$，
设 $DC=x$，则 $AC=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}x$，$BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，

在△ABC中，由余弦定理，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\cdot\cos 60°$，解得 $x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

13. $2e$　令 $t=\ln x$，$f(t)=te^t$，所以 $f(x)=xe^x$，$f'(x)=(x+1)e^x$，$f'(1)=2e$.

14. $\frac{7}{2}$　建立如图所示的坐标系，可得 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$E(2,\frac{3}{2})$，$F(x,3)$，



∴$\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AF}=(x,3)$，

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=2x=3$ 解得 $x=\frac{3}{2}$，∴$F(\frac{3}{2},3)$

∴$\overrightarrow{AE}=(2,\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{BF}=(-\frac{1}{2},3)$，

∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=-1+\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$.

15. $(0,\frac{2}{3})$　由于 $f(-x)=f(x)$，所以函数为偶函数，且在$[0,+\infty)$上为减函数. 要 $f(x-1)<f(2x-1)$，则需$|x-1|>|2x-1|$，解得 $x\in(0,\frac{2}{3})$.

16. $[4\sqrt{3},+\infty)\cup\{2\sqrt{3}\}$　由正弦定理知，满足 $b=4$，$A=60°$三角形仅有一个，则 $a=b\sin A$ 或 $a\geqslant b$，即 $a=2\sqrt{3}$ 或 $a\geqslant 4$，由余弦定理得，$c=2+\sqrt{a^2-12}$，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\sqrt{3}(2+\sqrt{a^2-12})\in\{2\sqrt{3}\}\cup[4\sqrt{3},+\infty)$.

17. 解：(1)由函数 $y=f(x)$的图象可知，$A=2$，…………………… 1 分

$\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，故 $T=2\pi$，则 $\omega=1$，…………………… 2 分

又当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$，且$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，…………………… 4 分

所以 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$. …………………… 5 分

(2)$g(x)=f(x)\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})\cos x=2(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)\cos x=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………… 8 分

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

故 $g(x)$的单调递增区间为$[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$. …………………… 10 分

18. 解：(1)∵$f(1)=5$，∴$m=4$. …………………… 1 分

∴$f(x)=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}$. …………………… 2 分

∵$f(x)$在$[1,2]$上递减，在$[2,4]$上递增，

且 $f(2)=4$，$f(1)=f(4)=5$. …………………… 4 分

∴$f(x)$值域为$[4,5]$. …………………… 5 分

(2)对于任意 $x_1\in[1,4]$，总存在 $x_0\in[-2,2]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$成立，

则 $f(x)$的值域是 $g(x)$值域的子集；…………………… 7 分

依题意知，$a\neq 0$

当 $a>0$ 时，$g(x_0)\in[-2a-1,2a-1]$，∴$[4,5]\subseteq[-2a-1,2a-1]$.

∴$\begin{cases}a>0\\-2a-1\leqslant 4\\2a-1\geqslant 5\end{cases}$. ∴$a\geqslant 3$. …………………… 9 分

当 $a<0$ 时，$g(x_0)\in[2a-1,-2a-1]$，∴$[4,5]\subseteq[2a-1,-2a-1]$.

∴$\begin{cases}a<0\\2a-1\leqslant 4\\-2a-1\geqslant 5\end{cases}$. ∴$a\leqslant -3$. …………………… 11 分

故 $a\geqslant 3$ 或 $a\leqslant -3$. …………………… 12 分

19. 解：(1)由正弦定理得$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，…… 2分

$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$，

由余弦定理可知，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，…… 4分

又$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. …… 5分

(2)因为△ABC是锐角三角形，由(1)知$C=\dfrac{\pi}{3}$，$A+B+C=\pi$得到$A+B=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，$\therefore\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$. …… 7分

由正弦定理得，$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，$b=4$.

由三角形面积公式有：$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}\dfrac{\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\dfrac{6}{\tan B}+2\sqrt{3}$. …… 10分

又因$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，故$\tan B>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore 2\sqrt{3}<S_{\triangle ABC}<8\sqrt{3}$.

故$S_{\triangle ABC}$的取值范围是$(2\sqrt{3},8\sqrt{3})$. …… 12分

20. 解：(1)$\because f'(x)=-\dfrac{b}{(a+bx)^2}$，$\therefore f'(1)=-\dfrac{b}{(a+b)^2}$. …… 1分

$\therefore f(x)$在$x=1$处的切线方程是$y-\dfrac{1}{a+b}=-\dfrac{b}{(a+b)^2}(x-1)$. …… 2分

依题意知，$\begin{cases}-\dfrac{b}{(a+b)^2}=-\dfrac{b}{4}\\\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{b}{(a+b)^2}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$或者$\begin{cases}a=-7\\b=5\end{cases}$. …… 4分

$\because a,b>0$　$\therefore a=b=1$. …… 5分

(2)$\because 2(x-k)f(x)\geqslant\ln x$，$\therefore k\leqslant x-\dfrac{1}{2}(x+1)\ln x$. …… 7分

令$g(x)=x-\dfrac{1}{2}(x+1)\ln x$，则$g'(x)=1-\dfrac{1}{2}(\ln x+\dfrac{x+1}{x})=\dfrac{1}{2}(1-\ln x-\dfrac{1}{x})$，

令$h(x)=g'(x)=\dfrac{1}{2}(1-\ln x-\dfrac{1}{x})$，$\therefore h'(x)=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{1-x}{2x^2}$.

当$x\in(0,1]$时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$递增，即$g'(x)$递增. …… 9分

$\therefore g'(x)\leqslant\dfrac{1}{2}(1-\ln 1-1)=0$，$\therefore g(x)$在$(0,1]$递减，$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=1$. …… 11分

$\therefore$实数k的取值范围为$k\leqslant 1$. …… 12分

21. 解：(1)因为$x=20$时，$y=7000$；$x=30$时，$y=1500$，所以$\begin{cases}\dfrac{n}{20}=1500\\100m+\dfrac{n}{10}=7000\end{cases}$，

解得$m=40$，$n=30000$，

每日的销售量$y=\begin{cases}40(x-30)^2+\dfrac{30000}{x-10}(10<x\leqslant 30)\\-70x+4900(30<x\leqslant 50)\end{cases}$. …… 5分

(2)由(1)知，当$10<x\leqslant 30$时：每日销售利润

$f(x)=[40(x-30)^2+\dfrac{30000}{x-10}](x-10)=40(x-30)^2(x-10)+30000=40(x^3-70x^2+1500x-9000)+30000$，$(10<x\leqslant 30)$. …… 7分

则$f'(x)=40(3x^2-140x+1500)$，

当$x=\dfrac{50}{3}$或$x=30$时，$f'(x)=0$，当$x\in(10,\dfrac{50}{3})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当 $x\in(\frac{50}{3},30)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

$\therefore x=\frac{50}{3}$ 是函数 $f(x)$ 在 $(10,30]$ 上的唯一极大值点，$f(\frac{50}{3})=40\times\frac{32000}{27}+30000$；…………………… 9 分

当 $30<x\leqslant50$ 时：每日销售利润 $f(x)=(-70x+4900)(x-10)=-70(x^2-80x+700)$，

$f(x)$ 在 $x=40$ 有最大值，且 $f(40)=63000<f(\frac{50}{3})$. …………………………………… 11 分

综上，销售价格 $x=\frac{50}{3}\approx16.67$ 元/枚时，每日利润最大. …………………………………… 12 分

22. 解：$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{3}(ax^2+a+1)+\frac{e^{-x}}{3}\cdot2ax=-\frac{e^{-x}}{3}(ax^2-2ax+a+1)$. …………………… 1 分

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 内为减函数，则 $f'(x)\leqslant0$ 在 $[1,2]$ 内恒成立.

而 $e^{-x}>0$，$\therefore ax^2-2ax+a+1\geqslant0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立. …………………………………… 2 分

（ⅰ）若 $x=1$，则 $1\geqslant0$ 恒成立. …………………………………………………… 3 分

（ⅱ）若 $x\in(1,2]$，则 $\therefore a(x-1)^2\geqslant-1$，$\therefore a\geqslant-\frac{1}{(x-1)^2}(x\in(1,2])$，

$\therefore a\geqslant[-\frac{1}{(x-1)^2}]_{\max}=-1$，综上 $a\geqslant-1$. …………………………………… 5 分

(2) 当 $a\geqslant-1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 内单调递减，$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=\frac{2a+1}{3e}$. …………………… 6 分

当 $a<-1$ 时，$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{3}(ax^2-2ax+a+1)$，令 $f'(x)=0$，

则 $x_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4a(a+1)}}{2a}=1\pm\frac{\sqrt{-a}}{a}$.

当 $a<-1$ 时，$1<x_1=1-\frac{\sqrt{-a}}{a}<2$，$x_2=1+\frac{\sqrt{-a}}{a}<1$，

当 $x\in[1,1-\frac{\sqrt{-a}}{a}]$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in[1-\frac{\sqrt{-a}}{a},2]$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. …………………………………… 8 分

$\therefore f(x)$ 的最大值只能在 $x=1$ 或 $x=2$ 处.

$f(2)-f(1)=\frac{1}{3e^2}[(5-2e)a+(1-e)]$.

（ⅰ）当 $a<\frac{e-1}{5-2e}$ 时，$f(2)>f(1)$，$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=\frac{1}{3e^2}(5a+1)$.

（ⅱ）当 $a=\frac{e-1}{5-2e}$ 时，$f(1)=f(2)$，$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=f(2)=\frac{1}{3e^2}(5a+1)$.

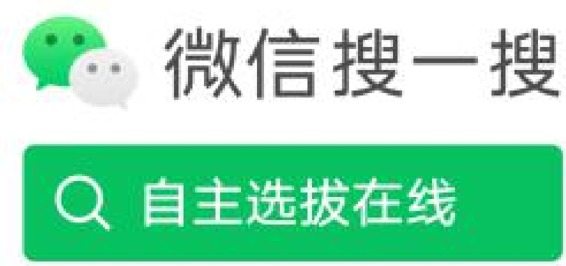
（ⅲ）当 $\frac{e-1}{5-2e}<a<-1$ 时，$f(1)>f(2)$，$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=\frac{2a+1}{3e}$. ………………………… 11 分

综上，$f(x)_{\max}=\begin{cases}\frac{1}{3e^2}(5a+1)\left(a\leqslant\frac{e-1}{5-2e}\right)\\\frac{1}{3e}(2a+1)\left(a>\frac{e-1}{5-2e}\right)\end{cases}$. …………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》