绝密★启用前

大联考

2022—2023学年高中毕业班阶段性测试(三)

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-1\leqslant 0\}$, $B=\{x||x|>x\}$,则 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A. $(-\infty,0)$　　B. $[0,1]$　　C. $[-1,0]$　　D. $[-1,+\infty)$

2. 已知条件 $p:\alpha\neq\frac{\pi}{4}$,条件 $q:\tan\alpha\neq 1$,则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$,则 $\cos 2\alpha=$

A. -1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$, $\boldsymbol{b}=(3,1)$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,则 $|\boldsymbol{a}|=$

A. 5　　B. $\sqrt{10}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}$

5. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\ x-2y+4\geqslant 0,\\ x-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最大值为

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

6. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, $A(m,4\sqrt{2})\left(m>\frac{p}{2}\right)$ 为该抛物线上一点,且 $\cos\angle AFO=-\frac{1}{3}$(点 O 为坐标原点),则 $p=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 8

7. 海上渔业生产发展迅猛，我国自主研发的大型海洋养殖船纷纷下海. 网箱养殖人工创造适合鱼类生长的环境，一段时间内，研究人员发现网箱内氧的含量 H(单位:mg/L)与时间 t(单位:h)之间的关系为 $H(t)=H_0e^{-mt}$(H_0 为网箱内氧的初始含量且 $H_0>0$)，且经过20 h后，网箱内氧的含量减少$\frac{61}{125}H_0$. 若当网箱内氧的含量低于初始含量的$\frac{2}{5}$时需要人工增氧，则大约经过(　　)h 后需要人工增氧.

参考数据:$\lg 2\approx 0.3$.

A. 39　　B. 33　　C. 31　　D. 27

8. 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,G 分别是棱 D_1C_1,AB,BC 的中点，H 是棱 CD 上一点，则下列命题中正确的个数为

①异面直线 D_1H 与 AB 之间的距离为定值；

②平面 EFG∥平面 AD_1H；

③设平面 $A_1AH\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=l$，则 $AH/\!/l$；

④直线 A_1C_1 与平面 ABC_1D_1 所成的角为30°.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

9. 已知函数$f(x)=\frac{2^x+1}{x(2^x-1)}$，则$f(x)$在$[-2,0)\cup(0,1]$上的值域为

A. $\left(-\infty,-\frac{5}{6}\right]\cup[3,+\infty)$　　B. $\left(0,\frac{5}{6}\right]$

C. $\left[-\frac{5}{6},0\right)\cup(0,3]$　　D. $\left[\frac{5}{6},+\infty\right)$

10. 已知函数$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(-m,0)$平移后对应的函数为 $g(x)$，若 $g(x)$ 在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上单调，则$|m|$的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

11. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{10}}{2}$，右焦点为 F，直线 l_1,l_2 均过点 F 且互相垂直，l_1 与双曲线的右支交于 A,C 两点，l_2 与双曲线的左支交于 B 点，O 为坐标原点，当 A,O,B 三点共线时，$\frac{|FC|}{|AF|}=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

12. 已知 $a=e^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{6}}$，$c=e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}$，则

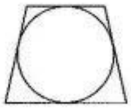
A. $b>c>a$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量$\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(a,4)$，$\overrightarrow{AD}=(a-1,7)$. 若$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{AD}$，则实数 $a=$________.

14. 已知圆 B 的方程为 $x^2+y^2-4y=0$，P 是圆 B 上一动点，点 $A(2,0)$，M 为线段 PA 的中点，则 $|BM|$ 的最小值为________.

15. 如图，有一半径为 1 的球形灯泡，要为其做一个上窄下宽的圆台形灯罩，要求灯罩对应的圆台的轴截面为球形灯泡对应的大圆的外切等腰梯形，则灯罩的表面积（不含下底面）至少为________.



16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $na_{n+1}-(n+1)a_n=2$，若使不等式 $S_n\leqslant 20$ 成立的最大整数为 10，则 a_1 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $2b\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-\sqrt{3}a\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)=a\sin B$.

(Ⅰ)求 B；

(Ⅱ)设点 D 是边 AC 的中点，若 $a+c=6$，求 BD 的取值范围.

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=ke^x+x^2(k\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 的图象在点 $(\ln 2,f(\ln 2))$ 处的切线斜率为 $\ln\frac{3}{2}$，求 k 的值；

(Ⅱ)当 $k<0$ 时，判断 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有几个零点，并证明.

19. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_2=-\frac{63}{16}$，且 $S_{n+1}-a_1=\frac{3}{4}S_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

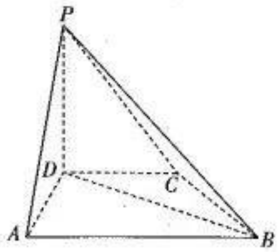
(Ⅱ)设数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{4-n}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，若 $\lambda b_n+T_n\leqslant 0$ 对任意 $n\geqslant 4$ 恒成立，求实数 λ 的最大值.

(12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$,$DC//$ 平面 PAB,$\angle DAB=90°$,$PC=BC=10$,$PD=AD=8$,$AB=12$,动点 F 在棱 AB 上运动.

(Ⅰ)求证:$PD\perp$ 平面 $ABCD$;

(Ⅱ)当 $CF\perp BD$ 时,求二面角 $F-PC-D$ 的余弦值.



(12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,焦距为 2,离心率为 $\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程.

(Ⅱ)已知点 G 的坐标为 $(4,0)$,是否存在直线 $l:x=t(|t|<a)$,使得对于 l 上任意一点 P(P 不在椭圆 E 上),若直线 PA_1 交椭圆 E 于另一点 M,直线 PA_2 交椭圆 E 于另一点 N,恒有 M,N,G 三点共线?若存在,求出 l 的方程;若不存在,请说明理由.

(12 分)

已知函数 $f(x)=ae^x+\frac{\ln x}{x},a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若 $x=e$ 时,$f(x)$ 取得极值,求 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ)若函数 $g(x)=xf(x)+x,x\in[1,+\infty)$,求使 $g(x)<2$ 恒成立的实数 a 的取值范围.

天一大联考
2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(三)
理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 D

命题意图 本题考查集合的概念与运算.

解析 由题可知 $A=\{x|-1\leq x\leq 1\}$, $B=\{x|x<0\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\geq 0\}$, 所以 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=[-1,+\infty)$.

2. 答案 B

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析 因为当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时, $\tan\alpha=1$, 所以由 p 推不出 q, 所以充分性不成立; 当 $\tan\alpha\neq 1$ 时, $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$ 成立, 所以必要性成立. 所以 p 是 q 的必要不充分条件.

3. 答案 C

命题意图 本题考查三角恒等变换.

解析 因为 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$, 所以 $\frac{\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}=-\sqrt{3}$, 解得 $\tan\alpha=0$, 所以 $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=\pm 1$, 所以 $\cos 2\alpha=1$.

4. 答案 D

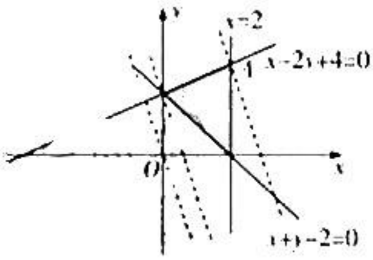
命题意图 本题考查向量的模的概念与计算.

解析 由题可知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+10+10}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+20}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+5$, 所以 $|\boldsymbol{a}|^2+5=2\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+20}$, 解得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$.

5. 答案 C

命题意图 本题考查线性规划.

解析 作出不等式组表示的平面区域,如图中阴影部分所示,作直线 $y=-3x$ 并平移,可知当直线经过点 A 时, z 取得最大值. 由 $\begin{cases}x=2,\\x-2y+4=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 即 $A(2,3)$, 故 $z_{\max}=9$.



6. 答案 C

命题意图 本题考查抛物线的方程与性质.

解析 过 A 作 $AH\perp x$ 轴于 H, 由抛物线的定义可知 $|AF|=m+\frac{p}{2}$, 又 $|FH|=m-\frac{p}{2}$, 所以在 Rt$\triangle AFH$ 中,

$\cos\angle AFH=\dfrac{m-\frac{p}{2}}{m+\frac{p}{2}}=\dfrac{1}{3}$.解得 $m=p$.将 $A(p,4\sqrt{2})$ 代入抛物线方程得 $p=4$.

7. **答案** D

命题意图 本题考查函数的应用及对数运算.

解析 根据题意,得 $\dfrac{64}{125}H_0=H_0e^{-20m}$,所以 $e^{-m}=\left(\dfrac{64}{125}\right)^{\frac{1}{20}}$,所以 $H(t)=H_0\left(\dfrac{64}{125}\right)^{\frac{t}{20}}$. 由 $H(t)<\dfrac{2}{5}H_0$,得 $H_0\left(\dfrac{64}{125}\right)^{\frac{t}{20}}<\dfrac{2}{5}H_0$,即 $\left(\dfrac{64}{125}\right)^{\frac{t}{20}}<\dfrac{2}{5}$,两边取对数并整理得 $t>\dfrac{20(\lg 2-\lg 5)}{\lg 64-\lg 125}=\dfrac{20(2\lg 2-1)}{9\lg 2-3}\approx 26\dfrac{2}{3}$,故大约经过 27 h 后需要人工增氧.

8. **答案** B

命题意图 本题考查线面平行、面面平行的判定与性质,线面角的计算.

解析 ①易证 D_1H // 平面 ABB_1A_1,因为 AB // A_1B_1,$A_1D_1\perp A_1B_1$,且 $A_1D_1\perp D_1H$,所以 A_1D_1 是异面直线 D_1H 与 A_1B_1 的公垂线段,所以异面直线 D_1H 与 AB 之间的距离为定值,①正确;易证 AD_1 // EF,D_1H 与 EG 是异面直线,AH 与 FG 是否平行不确定,故②不一定正确;易证 AH // 平面 $A_1B_1C_1D_1$,由线面平行的性质定理可知③正确;④连接 A_1D,与 AD_1 交于点 O,连接 OC_1,因为 $A_1O\perp AD_1$,$A_1O\perp AB$,所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC_1D_1,所以 $\angle A_1C_1O$ 为所求的线面角,设正方体的棱长为 2,则 $\sin\angle A_1C_1O=\dfrac{A_1O}{A_1C_1}=\dfrac{1}{2}$,$\angle A_1C_1O=30^\circ$,④正确. 故选 B.

9. **答案** D

命题意图 本题考查函数的性质与值域的求解.

解析 由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$. 因为 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+1}{-x(2^{-x}-1)}=\dfrac{2^x+1}{x(2^x-1)}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数. 因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x(2^x-1)}$,所以当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时,$f(x)\to+\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to 0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,又 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 因为 $f(1)=3$,$f(-2)=\dfrac{5}{6}$,所以 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的值域为 $\left[\dfrac{5}{6},+\infty\right)$,在 $(0,1]$ 上的值域为 $[3,+\infty)$,所以 $f(x)$ 在 $[-2,0)\cup(0,1]$ 上的值域为 $\left[\dfrac{5}{6},+\infty\right)\cup[3,+\infty)=\left[\dfrac{5}{6},+\infty\right)$.

10. **答案** A

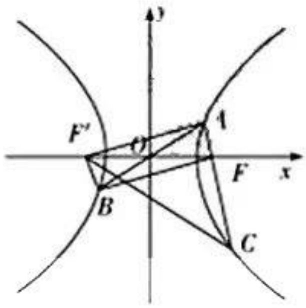
命题意图 本题考查三角函数的性质及图象变换.

解析 由题可知 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,$g(x)$ 的解析式为 $g(x)=2\sin\left(2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 因为 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,所以 $-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,$2m\leqslant 2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2m+\dfrac{5\pi}{6}$. 若 $g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调,则 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2m,\\ 2m+\dfrac{5\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2m,\\ 2m+\dfrac{5\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,解得 $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\leqslant m\leqslant-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ 或 $\dfrac{\pi}{4}+k\pi\leqslant m\leqslant\dfrac{\pi}{3}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $|m|$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$.

11. **答案**　B

命题意图　本题考查双曲线的定义与性质,及直线与双曲线的位置关系.

解析　如图,设双曲线的左焦点为 F',双曲线的半焦距为 $c(c>0)$,则焦距 $|F'F|=2c$. 设 $|AF|=m(m>0)$,$|FC|=tm(t>0)$,连接 AF',BF',CF'. 根据双曲线的对称性可知 $|OA|=|OB|$,$|OF|=|OF'|$,又 $BF\perp AC$,所以四边形 $AFBF'$ 为矩形. 由双曲线的定义可知 $|AF'|=m+2a$,$|F'C|=|FC|+2a=tm+2a$. 又 $|AC|=|AF|+|FC|=(t+1)m$,所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AF'C$ 中,$|F'C|^2=|AF'|^2+|AC|^2$,即 $(tm+2a)^2=(m+2a)^2+[(t+1)m]^2$,解得 $m=\frac{2a(t-1)}{t+1}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AF'F$ 中,$|F'F|^2=|AF'|^2+|AF|^2$,即 $4c^2=(m+2a)^2+m^2$,即 $4c^2=2m^2+4am+4a^2$,所以 $4c^2=2\left[\frac{2a(t-1)}{t+1}\right]^2+4a\times\frac{2a(t-1)}{t+1}+4a^2$,即 $\frac{4c^2}{4a^2}=2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2+2\times\frac{t-1}{t+1}+1$. 因为 $\frac{4c^2}{4a^2}=\frac{5}{2}$,代入上式解得 $t=3$.



12. **答案**　A

命题意图　本题考查构造函数,利用导数研究函数的性质.

解析　$a=e^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}$,$c=e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}$. 设 $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,则 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$. 因为 $\cos x\geq\sin x$,所以 $f'(x)\geq 0$,$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增. 因为 $0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}$,所以 $e^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}<e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}$,所以 $c>a$,排除 C;因为 $0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\sin\frac{1}{2}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,又 $0<e^{-\frac{1}{2}}<e^{-\frac{\pi}{6}}$,所以 $e^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}<\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}$,所以 $b>a$,排除 D;因为 $\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}}>\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7}{12}}>\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=1$,所以 $b>c$. 故选 A.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案**　$\frac{11}{4}$

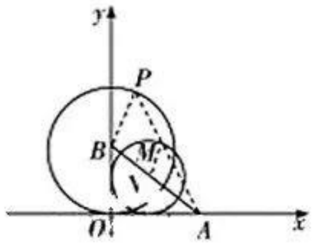
命题意图　本题考查向量的线性运算.

解析　由题可知,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(a-2,3)$,又 $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{AD}$,所以 $3(a-1)-7(a-2)=0$,解得 $a=\frac{11}{4}$.

14. **答案**　$\sqrt{2}-1$

命题意图　本题考查圆的方程及性质,圆与圆的位置关系.

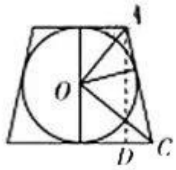
解析　圆 B 的方程可化为 $x^2+(y-2)^2=4$,可知 $B(0,2)$,如图,取线段 AB 的中点 $N(1,1)$,连接 MN,又 M 为线段 PA 的中点,所以 $|MN|=\frac{1}{2}|BP|=1$,所以 M 点在以 $N(1,1)$ 为圆心,1 为半径的圆上,圆 N 的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$,圆 B 与圆 N 相交,$|BM|$ 的最小值为 $|BN|-1=\sqrt{2}-1$.



15. 答案　$2(1+\sqrt{2})\pi$

命题意图　本题考查圆台的侧面积的计算及基本不等式的应用.

解析　如图,过 A 作 AD 垂直于下底于 D. 设球心为 O,圆台的上底面半径为 r,下底面半径为 R,母线长为 l,由平面几何知识可知 $l=R+r$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$AC^2=CD^2+AD^2$,即 $(R+r)^2=(R-r)^2+2^2$,所以 $Rr=1$. 灯罩的表面积 $S=S_{圆台侧}+S_{上底}=\pi(R+r)l+\pi r^2=\pi(R+r)^2+\pi r^2=\pi(R^2+2Rr+2r^2)=2\pi+\pi(R^2+2r^2)\geqslant 2\pi+\pi(2\sqrt{R^2\times 2r^2})=2(1+\sqrt{2})\pi$,等号当且仅当 $R^2=2r^2$ 且 $Rr=1$,即 $R=\sqrt[4]{2}$,$r=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ 时取得.



16. 答案　$\left(-\frac{15}{11},-\frac{14}{11}\right]$

命题意图　本题考查数列的综合应用.

解析　因为 $na_{n+1}-(n+1)a_n=2$,所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. 于是 $\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$,$\frac{a_3}{3}-\frac{a_2}{2}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$,…,$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$. 累加得 $\frac{a_n}{n}-\frac{a_1}{1}=2\left(1-\frac{1}{n}\right)$,即 $a_n=(a_1+2)n-2$,由题易知 $a_1\neq -2$,所以 $\{a_n\}$ 为等差数列,$S_n=\frac{1}{2}[(a_1+2)n^2+(a_1-2)n]$,因为使不等式 $S_n\leqslant 20$ 成立的最大整数为 10,结合二次函数性质可得 $\begin{cases}a_1+2>0,\\ S_{10}\leqslant 20,\\ S_{11}>20,\end{cases}$ 解得 $-\frac{15}{11}<a_1\leqslant -\frac{14}{11}$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查解三角形.

解析　(Ⅰ)由已知可得 $2b\sin A-\sqrt{3}a\cos B=a\sin B$,即 $b\sin A=a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)$.

由正弦定理可得 $b\sin A=a\sin B$, ……………………………………………………………… (2 分)

所以 $a\sin B=a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)$,

即 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$,可得 $\tan B=\sqrt{3}$, ………………………………………… (4 分)

又因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… (5 分)

（Ⅱ）如图，延长 BD 到 E，使 $DE=BD$，连接 AE，CE，

则四边形 $ABCE$ 为平行四边形，

$BE=2BD$，$\angle BAE=\frac{2\pi}{3}$，$AB=c$，$AE=BC=a$. ……（6 分）

在 $\triangle BAE$ 中，由余弦定理可得，$BE^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}=a^2+c^2+ac=(a+c)^2-ac$. ……（7 分）

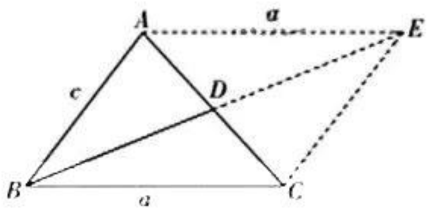
因为 $ac\leqslant\frac{(a+c)^2}{4}$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立.

所以 $BE^2=(a+c)^2-ac\geqslant\frac{3}{4}(a+c)^2=\frac{3}{4}\times 36=27$.

所以 $BE\geqslant 3\sqrt{3}$. ……（8 分）

注意到 $BE<a+c=6$，所以 $3\sqrt{3}\leqslant BE<6$，

故 BD 的取值范围为 $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2},3\right)$. ……（10 分）



18. 命题意图　本题考查导数的几何意义及导数在求函数零点问题中的应用.

解析　（Ⅰ）由题可知 $f'(x)=ke^x+2x$. ……（1 分）

所以 $f(x)$ 的图象在点 $(\ln 2,f(\ln 2))$ 处的切线斜率为 $f'(\ln 2)=2k+2\ln 2=\ln\frac{3}{2}$. ……（3 分）

即 $2k=\ln\frac{3}{2}-2\ln 2=\ln\frac{3}{8}$.

所以 $k=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$. ……（4 分）

（Ⅱ）$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有唯一的零点. ……（5 分）

证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有唯一的零点等价于方程 $ke^x+x^2=0(k<0)$ 有唯一负实根. ……（7 分）

等价于方程 $k=-\frac{x^2}{e^x}(k<0)$ 有唯一负实根. 等价于直线 $y=k(k<0)$ 与曲线 $g(x)=-\frac{x^2}{e^x}$ 在 $x<0$ 时有唯一的交点. ……（9 分）

因为 $g'(x)=\frac{x^2-2x}{e^x}=\frac{x(x-2)}{e^x}$，……（10 分）

所以当 $x<0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(0)=0$，且 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，……（11 分）

所以直线 $y=k(k<0)$ 与曲线 $g(x)=-\frac{x^2}{e^x}(x<0)$ 有唯一的交点，结论得证. ……（12 分）

19. 命题意图　本题考查等比数列的定义及错位相减法.

解析　（Ⅰ）因为 $S_{n+1}-a_1=\frac{3}{4}S_n$，

所以当 $n=1$ 时 $S_2-a_1=\frac{3}{4}a_1$. ………………………………………………………………（1 分）

因为 $S_2=-\frac{63}{16}$,所以 $a_1=-\frac{9}{4}$,$S_{n+1}+\frac{9}{4}=\frac{3}{4}S_n$,即 $4S_{n+1}=3S_n-9$. ……………………………（2 分）

所以 $4S_n=3S_{n-1}-9(n\geqslant2)$,两式相减可得 $4a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$. ……………………………（3 分）

又 $a_1=-\frac{9}{4}$,$4(a_1+a_2)=3a_1-9$,所以 $a_2=-\frac{27}{16}$,则 $4a_2=3a_1$. ……………………………（4 分）

所以 $\{a_n\}$ 是以 $-\frac{9}{4}$ 为首项,$\frac{3}{4}$ 为公比的等比数列.

因此 $a_n=-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$. ……………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题意得 $b_n=(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$. ……………………………………………………（6 分）

则 $T_n=(-3)\times\frac{3}{4}+(-2)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$,

$\frac{3}{4}T_n=(-3)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-2)\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ ……………………………（7 分）

两式相减,得 $\frac{1}{4}T_n=(-3)\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n+(-4)\times\frac{3}{4}-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$=\dfrac{\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{4}}-3-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$=-n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

所以 $T_n=-4n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ ……………………………………………………………（9 分）

由题意可得 $\lambda(n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n-4n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\leqslant0$ 对任意 $n\geqslant4$ 恒成立,

即 $\lambda(n-4)\leqslant3n$ 对任意 $n\geqslant4$ 恒成立. ……………………………………………………（10 分）

当 $n=4$ 时,λ 为任意实数,

当 $n>4$ 时,$\lambda\leqslant\frac{3n}{n-4}$,即 $\lambda\leqslant3+\frac{12}{n-4}$,

因为 $3<3+\frac{12}{n-4}\leqslant15$,所以 $\lambda\leqslant3$.

综上,实数 λ 的最大值为 3. …………………………………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查线面垂直的判定及空间向量的应用.

解析 （Ⅰ）$\because DC\,/\!/$ 平面 PAB,$DC\subset$ 平面 $ABCD$,平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAB=AB$,

$\therefore AB\,/\!/\,CD$. ………………………………………………………………………………（1 分）

$\because\angle DAB=90^\circ$,$\therefore\angle ADC=90^\circ$. …………………………………………………………（2 分）

如图,过点 C 作 $CN\perp AB$ 交 AB 于 N,则四边形 $ADCN$ 为矩形,$AN=CD$,$AD=CN=8$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCN$ 中,$BC=10$,$CN=8$,

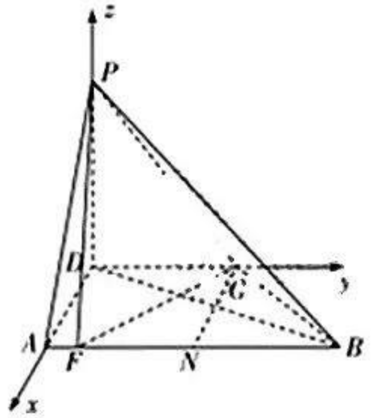
$\therefore PD\perp DC$. ……………………………………………………………………………… (4 分)

又平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$PD\subset$ 平面 PCD，

$\therefore PD\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得，DA，DC，DP 两两互相垂直.

如图，以 DA，DC，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$. ……………………… (6 分)



则 $D(0,0,0)$，$A(8,0,0)$，$B(8,12,0)$，$C(0,6,0)$，$P(0,0,8)$. ……………………………………… (7 分)

设 $F(8,t,0)$，则 $\overrightarrow{CF}=(8,t-6,0)$，$\overrightarrow{DB}=(8,12,0)$.

由 $CF\perp BD$，可得 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，解得 $t=\frac{2}{3}$，所以点 F 的坐标为 $\left(8,\frac{2}{3},0\right)$. ……………………… (8 分)

易知平面 DPC 的一个法向量为 $\overrightarrow{DA}=(8,0,0)$. ……………………………………………… (9 分)

设平面 FPC 的法向量为 $n=(x,y,z)$

$\overrightarrow{PC}=(0,6,-8)$，$\overrightarrow{CF}=\left(8,-\frac{16}{3},0\right)$.

由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}6y-8z=0,\\ 8x-\frac{16}{3}y=0,\end{cases}$

取 $y=12$，则 $n=(8,12,9)$. ………………………………………………………………………… (10 分)

所以 $\cos\langle n,\overrightarrow{DA}\rangle=\dfrac{n\cdot\overrightarrow{DA}}{|n||\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{64}{8\times\sqrt{8^2+12^2+9^2}}=\dfrac{8}{17}$. ……………………………………… (11 分)

易知二面角 $F-PC-D$ 为锐二面角，

故二面角 $F-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{8}{17}$. ………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质及直线与椭圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)设椭圆 E 的焦距为 $2c(c>0)$，则 $2c=2$，所以 $c=1$，

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2$. ……………………………………………………………… (2 分)

因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b^2=3$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知$A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$.

假设存在直线$l: x=t(|t|<a)$满足题设条件，则$|t|<2$. 设$P(t,y_0)$，易知直线MN的斜率存在.

因为M,N,G三点共线，所以可设直线MN的方程为$y=k(x-4)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$. ………………(5分)

将直线MN的方程与椭圆方程联立消去y并整理得$(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

则$x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$. ………………(7分)

因为P、M、A_1三点共线，所以$\frac{y_0}{t+2}=\frac{y_1}{x_1+2}$. ①

同理P、N、A_2三点共线，所以$\frac{y_0}{t-2}=\frac{y_2}{x_2-2}$. ② ………………(8分)

当$y_0=0$时，$y_1=y_2=0$，式子①②恒成立.

当$y_0\neq0$时，①②平方相除得$\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^2=\frac{y_1^2(x_2-2)^2}{y_2^2(x_1+2)^2}=\frac{3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)(x_2-2)^2}{3\left(1-\frac{x_2^2}{4}\right)(x_1+2)^2}=\frac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$.

设$\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^2=\lambda$，则$(\lambda-1)x_1x_2+2(\lambda+1)(x_1+x_2)+4(\lambda-1)=0$. ………………(10分)

将x_1x_2，x_1+x_2的值代入上式，得$(\lambda-1)(64k^2-12)+64(\lambda+1)k^2+4(\lambda-1)(3+4k^2)=0$，即$(9\lambda-1)k^2=0$，

所以当$\lambda=\frac{1}{9}$时，上式恒成立，从而解得$t=1$或4(舍去).

故存在直线$l: x=1$满足题设条件. ………………(12分)

22. 命题意图　本题考查导数的综合应用.

解析　(Ⅰ)由题可知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=ae^x+\frac{1-\ln x}{x^2}$. ………………(1分)

因为$x=e$时，$f(x)$取得极值，

所以$f'(e)=0$，解得$a=0$. ………………(2分)

所以$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

因为当$x\in(0,e)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)<0$，所以$x=e$时$f(x)$取得极大值，满足题意.

所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,e)$，单调递减区间为$(e,+\infty)$. ………………(4分)

(Ⅱ)由题可知$g(x)=xf(x)+x=axe^x+\ln x+x$，$x\in[1,+\infty)$，

则$g'(x)=a(e^x+xe^x)+\frac{1}{x}+1=(x+1)\left(ae^x+\frac{1}{x}\right)$. ………………(5分)

因为$x\geqslant1$，

所以当$a\geqslant0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$g(x)_{min}=g(1)=ae+1$，

$g(x)<2$不恒成立. ………………(7分)

当$a<0$时，令$h(x)=ae^x+\frac{1}{x}$，$x\geqslant1$，

则$h'(x)=ae^x-\frac{1}{x^2}$.

所以 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，$h(x)_{\max}=h(1)=ae+1$.

若 $ae+1\leqslant 0$，即 $a\leqslant -\frac{1}{e}$，则 $g'(x)=(x+1)\left(ae^x+\frac{1}{x}\right)\leqslant 0$，$g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=ae+1<2$ 显然成立.

所以 $a\leqslant -\frac{1}{e}$. ………………………………………………………………（9 分）

若 $ae+1>0$，即 $-\frac{1}{e}<a<0$，则 $-\frac{1}{a}>e>1$，$h(1)>0$，$h\left(-\frac{1}{a}\right)=ae^{-\frac{1}{a}}-a=a\left(e^{-\frac{1}{a}}-1\right)<0$. ………（10 分）

又 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)$ 在 $\left(1,-\frac{1}{a}\right)$ 上有唯一的零点 x_0，即 $ae^{x_0}+\frac{1}{x_0}=0$，且当 $x\in[1,x_0)$ 时，$h(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，

$h(x)<0$，所以 $ax_0e^{x_0}=-1$，$\ln x_0+x_0=\ln\left(-\frac{1}{a}\right)$.

且 $g(x)$ 在 $[1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(x_0)=ax_0e^{x_0}+\ln x_0+x_0=-1+\ln\left(-\frac{1}{a}\right)$.

令 $-1+\ln\left(-\frac{1}{a}\right)<2$，

解得 $a<-\frac{1}{e^3}$，所以 $-\frac{1}{e}<a<-\frac{1}{e^3}$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{e^3}\right)$. ………………………………………（12 分）

关于我们