银川市 2023 年普通高中学科教学质量检测
理科数学参考答案

选择题答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	C	B	C	A	A	B	C	A	B

填空题答案

13. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　14. $\sqrt{3}$　　15. $\dfrac{4}{5}$　　16. $\left[e^{\frac{1}{e}},+\infty\right)$

17.（1）解：由题意知：$\overline{x}=\dfrac{1}{4}(1+2+3+4)=2.5$，$\overline{y}=6.545$

$$\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=65.83$$

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2=30$$

所以 $\beta=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i-4\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2-4\overline{x}^2}=\dfrac{65.83-4\times2.5\times6.545}{30-4\times2.5^2}=0.076$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x}=6.545-0.076\times2.5=6.355$

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.076x+6.355$．

当 $x=8$ 时，$\hat{y}=0.076\times8+6.355=6.963>6.9$　　　　6 分

所以根据线性回归模型预测 2025 年水产品年产量可以实现目标．

（2）列联表

	渔业年产量超过 90 万吨的地区	渔业年产量不超过 90 万吨的地区	合计
有渔业科技推广人员高配比的地区	4	12	16
没有渔业科技推广人员高配比的地区	10	6	16
合计	14	18	32

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{32\times(4\times6-10\times12)^2}{16\times16\times14\times18}\approx4.571>3.841$$

故有 95%的把握认为“渔业科技推广人员配比和年产量”有关系．　　　　12 分

18．解：因为 $a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=n\cdot3^n$

当 $n\geq2$ 时 $a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1}=(n-1)\cdot3^{n-1}$

相减得 $3^{n-1}a_n=n\cdot3^n-(n-1)\cdot3^{n-1}=3^{n-1}(2n+1)$

得 $a_n=2n+1$　　　　3 分

当 $n=1$ 时，$a_1=3$ 满足上式　　4 分

综上：$a_n=2n+1$

$S_n=n^2+2n$　　6 分

（2）选① $b_n=\dfrac{S_n}{n}+2^{a_n}$

解：由（1）可知：$a_n=2n+1$　　$S_n=n^2+2n$

$\therefore b_n=\dfrac{S_n}{n}+2^{a_n}=\dfrac{n^2+2n}{n}+2^{2n+1}=n+2+2^{2n+1}$

$\because T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$

$\therefore T_n=\dfrac{n(3+n+2)}{2}+\dfrac{2^3(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{n(n+5)}{2}+\dfrac{8(4^n-1)}{3}$　　12 分

选② $b_n=\dfrac{1}{S_n}$

解：由（1）可知：$S_n=n^2+2n$

$\therefore b_n=\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$

$\because T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$

$T_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6})+\cdots+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2})$　　12 分

选③ $b_n=(a_n-1)\cdot 2^{n-1}$

解：由（1）可知：$a_n=2n+1$

$\therefore b_n=(a_n-1)\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$

$\because T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$

则 $T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^{n-1}+n\times 2^n$

于是得 $2T_n=2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$

两式相减得 $-T_n=2+2^2+2^3\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-1$，

所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+1$.　　12 分

19.（1）证明：取 AC 的中点 O，连接 OB，OP

$\therefore OP\perp AC$　　①

同理可得，$OB\perp AC$　　②

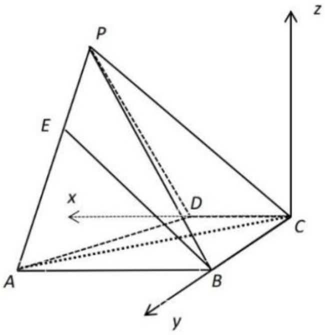
$\because$ 平面 $OP\cap OB=O$，

$\therefore AC\perp$ 平面 POB，

$\because PB\subset$ 平面 POB

$\therefore PB\perp AC$　　5 分

（2）以 C 为原点，以 CD 为 x 轴，以 CB 为 y 轴，建立如图所示的坐标系



平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，交线为 CD，又 $\angle ABC=90°$，$AB//CD$，

所以 $BC\perp CD$，所以 $BC\perp$ 面 PCD，所以 $BC\perp PC$

$\angle PCD$ 二面角 $P-BC-D$ 的平面角，$\angle PCD=45°$，$AB=2CD=2$，

所以 P（2，0，2），A（2，2，0），B（0，2，0），D（1，0，0）

设 $E(x,y,z)$，$\overrightarrow{PA}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{PE}=(x-2,y,z-2)$，设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PA}$

解得 $P(2,2\lambda,2-2\lambda)$，所以 $\overrightarrow{PB}=(2,2\lambda-2,2-2\lambda)$

设平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\overrightarrow{PA}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(1,2,0)$

$\begin{cases}2y-2z=0\\x-2y=0\end{cases}$ 　令 $y=1$，$\therefore x=2$，$z=1$

$\vec{n}=(2,1,1)$

直线 EB 与平面 PAD 所成角的正弦值

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PB},\vec{n}>\right|=\frac{4+2\lambda-2+2-2\lambda}{\sqrt{6}\sqrt{4+8(\lambda-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{4+8(\lambda-1)^2}}\geq\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$\sin\theta_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，此时 $\lambda=0$，E 与 P 重合．　　　　12 分

20．解析：

$f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+\ln x-(a+1)x$

当 $a=-4$ 时，$f(x)=-2x^2+\ln x+3x$

所以 $f'(x)=-4x+\dfrac{1}{x}+3=\dfrac{-4x^2+3x+1}{x}=\dfrac{(-4x-1)(x-1)}{x}>0$

解得 $x>1$

所以 $f(x)$ 在（0，1）上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=1$，无极小值．　　　　5 分

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{\ln x}{x}-(a+1)$ 有两个极值点，

所以 $g'(x)=\frac{1}{2}a+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\frac{1}{2}ax^2+1-\ln x}{x^2}=0$ 有两个不等正根

所以 $h(x)=\frac{1}{2}ax^2+1-\ln x=0$ 有两个不等正根.

$h'(x)=ax-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-1}{x}>0$　　　解得 $x>\sqrt{\frac{1}{a}}$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{\frac{1}{a}},+\infty)$ 上单调递增

当 $h\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)<0$，即 $\frac{1}{2}a\frac{1}{a}+1-\ln\sqrt{\frac{1}{a}}<0$，解得 $a<e^{-3}$　　　　10 分

当 $x\in(0,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 时，令 $x_0=\min\left\{1,\sqrt{\frac{1}{a}}\right\}$，易知，当 $x<x_0$，$h(x)>0$

当 $x\in(\sqrt{\frac{1}{a}},+\infty)$

又因为 $\ln x<x-1$，$-\ln x>-x+1$

所以 $h(x)=\frac{1}{2}ax^2+1-\ln x>\frac{1}{2}ax^2+2-x$

令 $y=\frac{1}{2}ax^2+2-x$，

当 $\Delta=1-4a\le 0$，$y=\frac{1}{2}ax^2+2-x\ge 0$ 恒成立

所以存在 $x_0\in(\sqrt{\frac{1}{a}},+\infty)$，当 $x>x_0$，$h(x)>0$

当 $\Delta=1-4a>0$，$y=\frac{1}{2}ax^2+2-x=0$ 有根 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$

所以存在 $x_0>x_2$ 时，当 $x>x_0$，$h(x)>y>0$

由零点存在定理，$h(x)=\frac{1}{2}ax^2+1-\ln x=0$ 有两个不等正根.

综上 $0<a<e^{-3}$　　　　12 分

21．解析：

（1）由题意知 $b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

所以 $a^2=2b^2$

又椭圆经过 T（2，1），所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

解得 $a^2=6$，$b^2=3$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$　　　　2 分

（2）联立直线与椭圆方程得

$$\begin{cases} y=x+m \\ x^2+2y^2=6 \end{cases} \quad \therefore x^2+2(x+m)^2=6\text{，}\therefore 3x^2+4mx+2m^2-6=0$$

又因为有两个交点，所以 $\Delta=16m^2-12(2m^2-6)>0$，解得 $-3<m<3$

又 $x_1+x_2=-\dfrac{4m}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{3}$

$$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{x_1+m-1}{x_1-2}+\frac{x_2+m-1}{x_2-2}$$

$$=\frac{x_1-2+m+1}{x_1-2}+\frac{x_2-2+m+1}{x_2-2}=2+(m+1)(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2})$$

$$=2+(m+1)\frac{x_1+x_2-4}{(x_1-2)(x_2-2)}=2+(m+1)\frac{x_1+x_2-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=2+(m+1)\frac{-\frac{4m}{3}-4}{\frac{2m^2-6}{3}-2(-\frac{4m}{3})+4}=2-(m+1)\frac{2(m+3)}{(m+1)(m+3)}=0$$ 得证 8 分

（3）椭圆 E 的弦切角 $\angle PTB$ 与弦 TB 对应的椭圆周角 $\angle TAB$ 相等

设切线方程为 $y-1=k\left(x-2\right)$

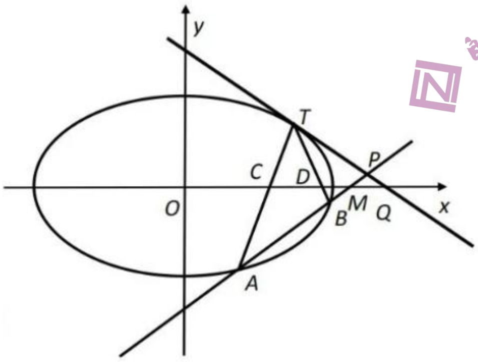
$$\begin{cases} y=kx+1-2k \\ x^2+2y^2=6 \end{cases} \quad \therefore x^2+2(kx+1-2k)^2=6$$

$$\therefore (1+2k^2)x^2+4k(1-2k)x+2(1-2k)^2-6=0$$

$$\Delta=0$$

$$\therefore k=-1$$

设切线与 x 轴交点为 Q，TA、TB 分别与 x 交于 C，D



$k_1+k_2=0$，所以 $\angle TCD=\angle TDC$，又 $\angle TQD=\angle AMC$，

$\angle TCD=\angle TAB+\angle AMC$，$\angle TDC=\angle PTB+\angle POD$

所以 $\angle PTB=\angle BAT$ 　　证毕． 12 分

22．（1）解：∵直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=1+\dfrac{1}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）

∴直线 l 的普通方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}-1=0$

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得，C（0，2），$M(-\sqrt{3},3)$，半径 $|CM|=2$

∴曲线 C 的普通方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，即 $x^2+y^2-4y=0$

故曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$　　　　5 分

（2）由（1）可知：曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-4y=0$，

将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=1+\dfrac{1}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）　代入曲线 C 的的普通方程为 $x^2+y^2-4y=0$

整理得 $t^2+(\sqrt{3}-1)t-2=0$

设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，则有 $\begin{cases} t_1+t_2=1-\sqrt{3} \\ t_1t_2=-2 \end{cases}$，

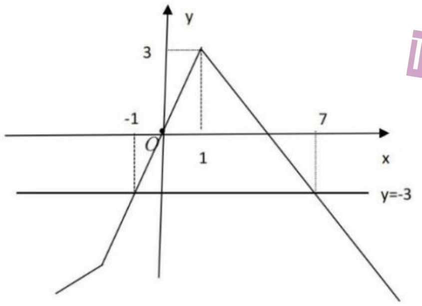
由参数 t 的几何意义可得：

$|PA|^2+|PB|^2=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=(1-\sqrt{3})^2-2\times(-2)=8-2\sqrt{3}$　　　　10 分

23．（1）解：由题意知：

$$y=\begin{cases} x-4, & x\le -2, \\ 3x, & -2<x<1, \\ -x+4, & x\ge 1. \end{cases}$$

作出函数 $f(x)=|x+2|-2|x-1|$ 的图象，它与直线 $y=-3$ 的交点为 $(-1,-3)$ 和 $(7,-3)$．



由图象可知：不等式 $f(x)\ge -3$ 的解集 $[-1,7]$．　　　　5 分

（2）由（1）可知：

当 $x=1$ 时，$y=f(x)$ 取得最大值 3，即 $c=3$

∵ $y=f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，且 $f(a)>f(b)$

∴ $a>b$，即 $a-b>0$

$\because\ 2a+\dfrac{1}{(a-b)^2}-(c+2b)=2(a-b)+\dfrac{1}{(a-b)^2}-3=(a-b)+(a-b)+\dfrac{1}{(a-b)^2}-3$

$\geq 3\sqrt[3]{(a-b)(a-b)\dfrac{1}{(a-b)^2}}-3=0$（当且仅当 $a-b=\dfrac{1}{(a-b)^2}$ 时取等号）

$\therefore\ 2a+\dfrac{1}{(a-b)^2}\geq c+2b$ 即证之　　10 分