

姓名: _____

考生考号: _____

2022—2023 学年度下学期高三第三次模拟考试试题

数 学

命题人: 旅顺中学 薛春才

沈阳二中 牛大伟

时间: 120 分钟

满分: 150 分

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名, 准考证号填写在答题卡上。

2. 答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题(本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A = \{x | y = \log_2(1-x)\}$, $B = \{x | x \leq -1\}$, 则 $A \cap (C_R B) = (\quad)$

A. $(-\infty, -1]$

B. $(-\infty, 1)$

C. $(-1, 1)$

D. $(-1, +\infty)$

2. 复数 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2023}$ 的虚部为()

A. -1

B. 1

C. -i

D. i

3. 如图, 辽宁省某示范性高中校园文化之一“惜时”的顶部是“日晷”。日晷是中国古代用来测量时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间。若晷面与赤道所在的平面平行, 且该示范性高中的位置约为东经 121° 北纬 38.5° , 则晷针与地面所成的角约为()

(把地球看成一个球, 球心记为 O , 地球上一点 A 的纬度是指 OA 与赤道所在平面所成线面角的度数, 地球上一点 A 的经度是指过 A 点的经线所在的半平面与本初子午线所在的半平面所成二面角的度数, 过点 A 且与 OA 垂直的平面看成地面)

A. 59°

B. 31°

C. 38.5°

D. 51.5°



4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与直线 $2x - y + 1 = 0$ 垂直, 则该双曲线 C 的离心率为()

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

5. 安排包括甲、乙在内的 4 名大学生去 3 所不同的学校支教, 每名大学生只去一个学校, 每个学校至少去 1 名, 甲、乙不能安排在同一所学校, 则不同的安排方法有()

A. 36 种

B. 30 种

C. 24 种

D. 12 种

6. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, 2kx^2 + kx - 1 < 0$ ”为真命题的一个必要不充分条件是()

- A. $(-8, 0)$ B. $(-8, 0]$ C. $[-8, 0]$ D. $(-3, 0)$

7. 某种货物的进价下降了 $x\%$, 但销售价不变, 于是这种货物的销售利润率 $\left(\frac{\text{销售价} - \text{进价}}{\text{进价}} \times 100\%\right)$

由原来的15%增加到25%, 则 x 的值等于()

- A. 8 B. 15 C. 25 D. 20

8. 过抛物线 $C: x^2 = 4py (p > 0)$ 的焦点 F 且倾斜角为锐角的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 过线段 AB 的中点 N 且垂直于 l 的直线与 C 的准线交于点 M , 若 $|MM| = |AB|$, 则 l 的斜率为()

- A. 2 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

二、多项选择题(本题共4小题, 每小题5分, 共20分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合要求, 全部选对得5分, 选对但不全的得2分, 有选错的得0分)

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 则下列说法正确的是()

- A. 若 $S_n = a_n$, 则 $\{a_n\}$ 是等差数列
 B. 若 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 3$, 则 $\{a_n + 3\}$ 是等比数列
 C. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等差数列
 D. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等比数列

10. $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形, 已知向量 a, b 满足 $\overrightarrow{AB} = 2a, \overrightarrow{AC} = 2a + b$, 则下列结论正确的是()

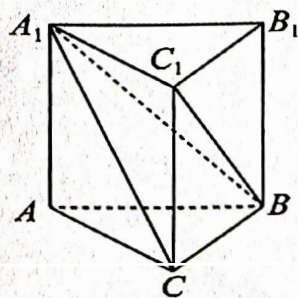
- A. $|b| = 1$ B. $(4a + b) \perp \overrightarrow{BC}$ C. $a \cdot b = -1$ D. $a \perp b$

11. 关于函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 (x \in \mathbb{R})$, 下列说法正确的是()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$
 B. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 1\right)$ 对称
 C. 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增
 D. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

12. 《九章算术》中将底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱称为“堑堵”; 底面为矩形, 一条侧棱垂直于底面的四棱锥称为“阳马”, 四个面均为直角三角形的四面体称为“鳖臑”, 如图在堑堵 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, 且 $AA_1 = AB = 2$. 下列说法正确的是()

- A. 四棱锥 $B - A_1ACC_1$ 为“阳马”
 B. 四面体 A_1ACB 的顶点都在同一个球面上, 且球的表面积为 8π
 C. 四棱锥 $B - A_1ACC_1$ 体积最大值为 $\frac{2}{3}$
 D. 四面体 A_1C_1CB 为“鳖臑”

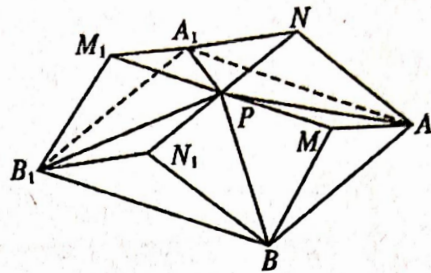


三、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分)

13. 一组数据 12, 34, 15, 24, 39, 25, 31, 48, 32, 36, 36, 37, 42, 50 的第75百分位数是_____.

14. 若 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -2$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$ 的值为_____.

15. 如图是两个直三棱柱 $B_1BN_1-A_1AN$ 和 $A_1M_1B_1-AMB$ 重叠后的图形, 公共侧面为正方形, 两个直三棱柱底面是腰为2的等腰直角三角形, 则该几何体的体积为_____.



16. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{x}{x^2 - ex + e^2}$, 若 $\forall x \in (1, +\infty)$,

使得 $(t+1)g(x) \leq t \cdot f(x)$ ($t > 0$) 成立, 则 t 的取值范围是_____.

四、解答题(本大题共6小题,共70分,解答需写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题满分10分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 且 $2S = a^2 - (b-c)^2$,

(1) 求 $\cos A$;

(2) 若 $a = \frac{\sqrt{41}}{2}$, $S = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本题满分12分)

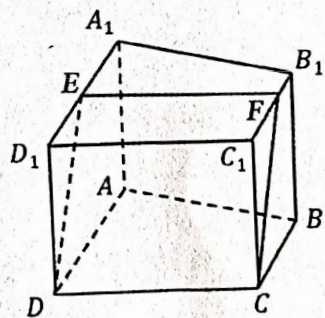
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2a_n - 2$, 等差数列 $\{b_n\}$ 中, $b_3 = 5, b_5 = 9$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = b_{a_n}, d_n = \frac{c_n + 1}{c_n c_{n+1}}$, 求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本题满分12分)

如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 所截, 截面为 $CDEF$, 且 $EF = DC, DC = 2AD = 4A_1E = 2, \angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 平面 $EFCD$ 与平面 $ABCD$



所成角的正切值为 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

(1) 证明: $AD \parallel BC$;

(2) 求直线 DE 与平面 AA_1F 所成角的正弦值.

20. (本题满分12分)

App 是英文 Application 的简称, 现多指智能手机的第三方应用程序. 随着智能手机的普及, 人们在沟通、社交、娱乐等活动中越来越依赖于手机 App 软件. 某公司为了了解其研发的 App 在某市的普及情况, 进行了问卷调查, 并从参与调查的市民中随机抽取了男、女各 100 人进行分析, 从而得到下表(单位: 人):

	经常使用	偶尔或不用	总计
男性	70		100
女性	90		100
总计			

(1)完成上表,并根据以上数据判断能否在犯错误的概率不超过0.005的前提下认为该市民经常使用该款App与性别有关;

(2)将频率视为概率,从该市所有参与调查的市民中随机抽取10人赠送礼品,记其中经常使用该款App的人数为 X ,求随机变量 X 的数学期望和方差(该市参与调查的市民男女比例为1:1).

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(3)阅读下列材料,回答问题:以(2)中所求的概率为基准,如果从该市所有参与调查的市民中随机抽取100人赠送礼品,每次抽取的结果相互独立,记经常使用该款App的人数为 η ,计算 $P(68 \leq \eta \leq 92)$.

材料:二项分布与正态分布是概率统计中两大非常重要的分布,并且这两大分布的关系非常密切,经研究表明,如果一个随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$,当 $np > 5$ 且 $np(1-p) > 5$ 时,二项分布就可以用正态分布近似替代,即 $P(X \leq x) \approx P(Y \leq x)$,其中随机变量 $Y \sim N(np, np(1-p))$.

$$\text{参考数据: } \xi \sim N(\mu, \sigma^2), P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6826,$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9544,$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9974.$$

21.(本题满分12分)

已知圆锥曲线 E 上有两个定点 $M(\sqrt{2}, 1)$ 、 $N(-\sqrt{2}, -1)$, P 为曲线 E 上不同于 M, N 的动点,且当直线 PM 和直线 PN 的斜率 k_{PM} , k_{PN} 都存在时,有 $k_{PM} \cdot k_{PN} = -\frac{1}{2}$.

(1)求圆锥曲线 E 的标准方程;

(2)若直线 $l: x = my + \sqrt{2}$ 与圆锥曲线 E 交于 A, B 两点,交 x 轴于点 F ,点 A, F, B 在直线 $l': x = 2\sqrt{2}$ 上的射影依次为点 D, K, G

①若直线 l 交 y 轴于点 T ,且 $\overline{TA} = \lambda_1 \overline{AF}$, $\overline{TB} = \lambda_2 \overline{BF}$,当 m 变化时,探究 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的值是否为定值?若是,求出 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的值;否则,说明理由;

②连接 AG, BD ,试探究当 m 变化时,直线 AG 与 BD 是否相交于定点?若是,请求出定点的坐标,并给予证明;否则,说明理由.

22.(本题满分12分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^a}$,其中 e 是自然对数的底数.

(1)当 $a = 1$ 时,函数 $f(x)$ 的图像是否存在平行于 x 轴的切线,如果存在求出切线方程,如果不存在说明理由;

(2)当 $a > 0$ 时,若函数 $g(x) = f(x) - e(x - a \ln x)$ 在 $(0, +\infty)$ 恰有两个零点,求 a 的取值范围(参考: $x \rightarrow 0, a \ln x - x + 1 \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty, a \ln x - x + 1 \rightarrow -\infty$.)