绵阳南山中学高2020级高三下期入学考试

数学试题(理工类)

命题人：刘盟　　审题人：蔡晓军

（时间：120分钟　分数：150分）

本试卷分为试题卷和答题卷两部分，其中试题卷由第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）组成，共5页.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上，并把对应的准考证号用2B铅笔涂黑.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案；答案不能答在试题卷上.

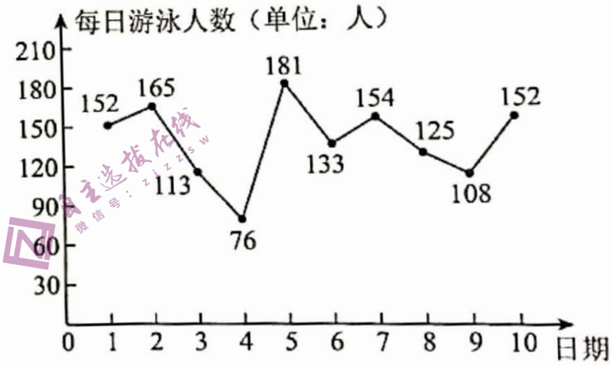
第Ⅰ卷（选择题，共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数z满足$z-\mathrm{i}=\dfrac{4+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则$z=$（　）

A. $3-3\mathrm{i}$　　B. $3+3i$　　C. $-3+3\mathrm{i}$　　D. $-3-3\mathrm{i}$

2. 某游泳馆统计了10天内某小区居民每日到该游泳馆锻炼的人数，整理数据，得到如下所示的折线图.则根据此折线图，下面结论正确的是（　）



A. 这10天内，每日游泳人数的极差大于106

B. 这10天内，每日游泳人数的平均值大于135

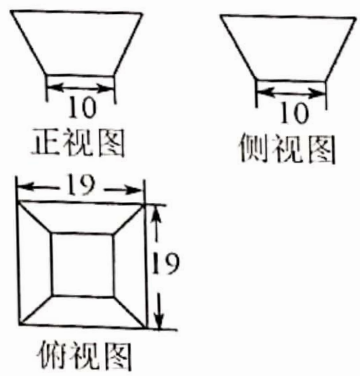
C. 这10天内，每日游泳人数的中位数大于145

D. 前5天每日游泳人数的方差小于后5天每日游泳人数的方差

3. 已知集合$A=\left\{x\middle|x^2-2x-3\le 0\right\}, B=\left\{x\middle|x\le 3, x\in N\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A. $[-1,3)$　　B. $\{-1,0,1,2,3\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

4. 中国的计量单位可追溯到4000多年前的氏族社会末期，秦王统一中国后，颁布了统一度量衡的诏书并制发了成套的权衡和容量标准器，如图是当时的一种度量工具“斗”（无盖，不计厚度）的三视图（正视图和侧视图都是等腰梯形），若此“斗”的体积约为2000立方厘米，则其高约为（　）（单位：厘米）

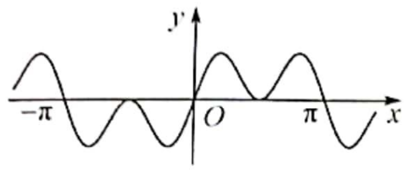


A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

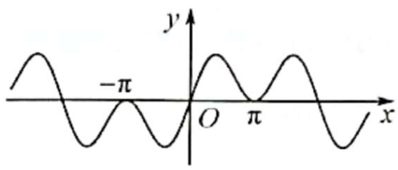
5．已知角α的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边经过点$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，则$\cos 2\alpha=$（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

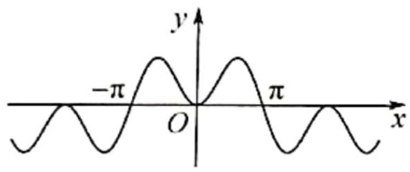
6．函数$f(x)=\cos x-\cos^3 x$的图像大致为（　）



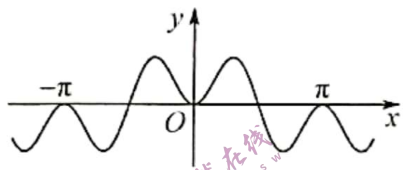
A．



B．

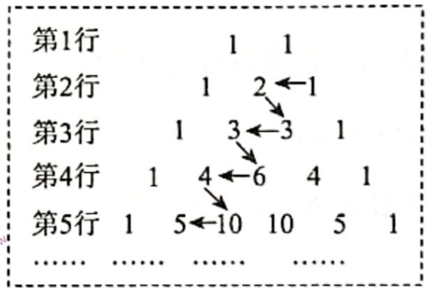


C．



D．

7．“杨辉三角”是中国古代数学文化的瑰宝之一，最早出现在中国南宋数学家杨辉于1261年所著的《详解九章算法》一书中.如图，若在“杨辉三角”中从第2行右边的1开始按“锯齿形”排列的箭头所指的数依次构成一个数列：1，2，3，3，6，4，10，5，…，则此数列的前20项的和为（　）



A．350　　B．295

C．285　　D．230

8．已知定义在R上的函数$f(x)$是奇函数且满足$f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f(x)$，$f(-2)=-3$，则

$f(2022)+f(2023)+f(2024)=$（　）

A．-2　　B．0　　C．2　　D．3

9．将函数$f(x)=\sin 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个长度单位，得函数$g(x)$图象，则以下结论中正确的是（　）

A．$g(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$　　B．$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称

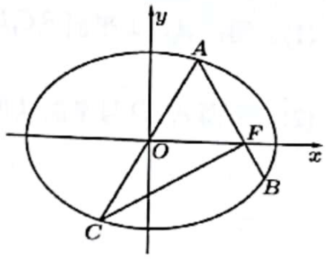
C．$g(x)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{16}$对称　　D．$g(x)$在区间$\left(-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$上单调递增

10．4张卡片的正、反面分别写有数字1，2；1，3；4，5；6，7．将这4张卡片排成一排，可构成不同的四位数的个数为（　）

A．288　　B．336　　C．368　　D．412

11．如图所示，点 F 是椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，A，C 是椭圆上关于原点 O 对称的两点，直线 AF 与椭圆的另一个交点为 B，若 $AF\perp FC,|AF|=2|BF|$，则椭圆 M 的离心率为（　）

A．$\sqrt{3}-1$　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$



12．已知 $a=\ln 1.5$，$b=\dfrac{1}{3}$，$c=\cos 1.25$，则大小关系正确的为（　）

A．$a>b>c$　　　　B．$b>a>c$　　　　C．$b>c>a$　　　　D．$c>a>b$

第II卷（非选择题，共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(1,1)$，若 $\vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}$，且 $\vec{b}\perp\vec{c}$，则实数 $k=$________．

14．已知 F_1，F_2 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的两个焦点，以线段 F_1F_2 为直径的圆与双曲线的渐近线在第一象限交于点 M，则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为_______．

15．从正四面体的顶点及其棱的中点共10个点中，任取3个点，则这三个点构成的三角形为等边三角形的概率为____________．

16．已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，$PB=PC$，$\angle PAB=90^\circ$，$\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，$\triangle PBC$ 的面积为 $5\sqrt{3}$，则球 O 的体积为_______．

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17-21题为必考题，每个试题考生必须作答，第22-23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：（本大题共5个小题，共60分．）

17．已知数列 $\{a_n\}$ $(a_n>0)$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_n^2+a_n=2S_n$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

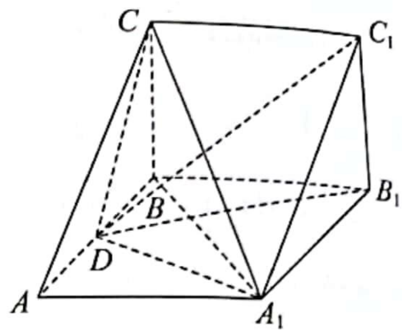
（2）记 $b_n=2^{a_n}$，$T_n=(3a_n-1)b_1+(3a_{n-1}-1)b_2+\cdots+(3a_1-1)b_n$，求 T_n 的值．

18．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且满足 $\dfrac{2\cos B}{ac}=\dfrac{\cos A}{ab}+\dfrac{\cos C}{bc}$．

(1)求 B；

(2)若 $b=\sqrt{6}$，BD 是 AC 边上的高，求 BD 的最大值．

19.如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，D 为线段 AB 的中点，$CB=4$，$AB=4\sqrt{3}$，$A_1C_1=8$，三棱锥 $A-A_1DC$ 的体积为 8.



(1)证明：$A_1D\perp$ 平面 B_1C_1D；

(2)求平面 A_1CD 与平面 A_1BC 夹角的余弦值.

20．已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点到准线的距离为 1.

(1)求抛物线 C 的标准方程；

(2)设点 $P(t,1)$ 是该抛物线上一定点，过点 P 作圆 $O:(x-2)^2+y^2=r^2$（其中 $0<r<1$）的两条切线分别交抛物线 C 于点 A,B，连接 AB．探究：直线 AB 是否过一定点，若过，求出该定点坐标；若不经过定点，请说明理由.

21．已知函数 $f(x)=2x-\dfrac{2}{x}-a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2 且 $x_1\in(1,\mathrm{e}]$（e为自然对数底数，且 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$），求 $f(x_1)-f(x_2)$ 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

【选修 4－4：坐标系与参数方程】（本题 10 分）

22．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\cos\theta \\ y=\dfrac{3}{2}\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系．

(1)求曲线 C_1 与曲线 C_2 的极坐标方程；

(2)曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A，B 两点．求 $|OA|^2+|OB|^2$ 的值．

【选修 4－5：不等式选讲】（本题 10 分）

23. 已知函数 $f(x)=|x+2|+2|x-t|$（$t>0$），若函数 $f(x)$ 的最小值为 5.

(1)求 t 的值；

(2)若 a，b，c 均为正实数，且 $2a+b+c=t$，求 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值.