高三数学 参考答案及解析

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

（1）$B=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}$，故选 C.

（2）$z=a+bi$ 其中 $a>0,b>0,zi=-b+ai$ 故在第二象限，故选 B.

（3）设 l 的方向向量为 (x,y) 则 $(x,y)(1,2)=(x,y)(3,4),x+2y=3x+4y,x=-y$ 斜率为 -1，故选 B.

（4）$2a=\frac{1}{3}\cdot 2c$，$e=3$，故选 A.

（5）$\angle APB$ 最大时即 PM 最小，$AB\perp OM$，故选 C

（6）利用奇函数的定义 $f(2x+1)+1=-[f(-2x+1)+1]\Rightarrow f(2x+1)+f(-2x+1)=-2$，故选 B.

（7）

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3})-\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{3}{2}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}-\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{4}$$

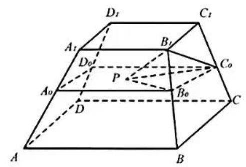
$$\sqrt{3}\cos\alpha(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha)-\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=0$$

$$\therefore\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故选 D.

（8）A_0,B_0,C_0,D_0 是 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 中点，P 是 A_0,B_0,C_0,D_0 中心

$$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=V_{P-ABCD}+V_{P-A_1B_1C_1D_1}+V_{P-BCC_1B_1}+V_{P-ABB_1A}+V_{P-ADD_1A_1}+V_{P-DCC_1D_1}$$



$$V_{P-ABCD}=\frac{1}{6}S_{ABCD}h,V_{P-A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{6}S_{A_1B_1C_1D_1}h$$

$$V_{P-BCC_1B_1}=4V_{P-B_0C_0B_1}=4V_{B_1-B_0C_0P}=\frac{2}{3}S_{B_0C_0P}h$$

$$V_{P-BCC_1B_1}+V_{P-ABB_1A}+V_{P-ADD_1A_1}+V_{P-DCC_1D_1}=\frac{2}{3}S_{A_0B_0C_0D_0}h$$

$$V=\frac{1}{6}h(S_{ABCD}+S_{A_1B_1C_1D}+4S_{A_0B_0C_0D_0})=64$$

故选 A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

（9）$f'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，$\therefore$A 正确，C 错误

$x_0\in(-\infty,0)$，$f(x_0)>0$，$\therefore$B 错误，$f(\frac{1}{3})<0,f(1)>0$，$\therefore$ D 正确

$\therefore$故答案为 AD.

（10）A 选项 $\overline{x}=\frac{n_1}{n_1+n_2}\overline{x_1}+\frac{n_2}{n_1+n_2}\overline{x_2}=\frac{5}{9}\times99+\frac{4}{9}\times90=55+40=95$ 正确

B 选项 $\overline{y}=\frac{n_1}{n_1+n_2}\overline{y_1}+\frac{n_2}{n_1+n_2}\overline{y_2}=\frac{5}{9}\times12\%+\frac{4}{9}\times7.5\%=10\%$ 正确

C 选项 $s^2=\frac{n_1}{n_1+n_2}(s_{x1}^2+(\overline{x_1}-\overline{x})^2)+\frac{n_2}{n_1+n_2}s_{x2}^2+(\overline{x_2}-\overline{x})^2)$

$=\frac{5}{9}(11+(99-95)^2)+\frac{4}{9}(11+(90-95)^2)=31$ 正确

D 选项，没有具体数据，错误

故答案为 ABC.

（11）由 $x\in(0,\frac{\pi}{6})$ 上单调得 $\frac{\pi}{6}\le\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$ 故 $0<\omega\le6$，$\omega x+\varphi\in(\varphi,\frac{\omega}{6}\pi+\varphi)$

$\frac{\omega}{6}\pi+\varphi\le\frac{\pi}{2}\ \therefore\omega<3$，D 不可能

$(2n-1)\cdot\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}$ 即 $\frac{(2n-1)\pi}{2\omega}=\frac{2\pi}{3}$，$\omega=\frac{3}{4}(2n-1)$，$\omega$ 为 $\frac{3}{4}$ 的奇数倍，B 不可能

当 $\omega=\frac{3}{4}$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，A 可以

当 $\omega=\frac{9}{4}$ 时，$\varphi=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，C 不可以

故答案为 BCD.

（12）A 选项 $\cos\theta=\cos2\theta\Rightarrow2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0\Rightarrow(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$

$\theta_1=0$，$\theta_2=\frac{2\pi}{3}$，$\theta_3=\frac{4\pi}{3}$ 正确

B 选项 $|\cos\theta-\cos2\theta|=1\Rightarrow|2\cos^2\theta-\cos\theta-1|=1$

$\Rightarrow2\cos^2\theta-\cos\theta-2=0$ 或 $2\cos^2\theta-\cos\theta=0$

$\cos\theta=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ 或 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=0$ 共 6 个解，正确

C 选项 $|\cos\theta-\cos2\theta|=\frac{9}{8}\Rightarrow|2\cos^2\theta-\cos\theta-1|=\frac{9}{8}$

$\Rightarrow2\cos^2\theta-\cos\theta-\frac{17}{8}=0$ 或 $2\cos^2\theta-\cos\theta+\frac{1}{8}=0$

$\cos\theta=\frac{1-3\sqrt{2}}{4}$ 或 $\cos\theta=\frac{1}{4}$ 共四个解，正确

D 选项 $|\cos\theta-\cos2\theta|=\frac{3}{2}\Rightarrow|2\cos^2\theta-\cos\theta-1|=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow2\cos^2\theta-\cos\theta-\frac{5}{2}=0$ 或 $2\cos^2\theta-\cos\theta+\frac{1}{2}=0$

$\cos\theta=\frac{1-\sqrt{21}}{4}$ 共两个解，错误

故答案选 ABC.

三、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.

（13）$S_5=S_7\Rightarrow a_6+a_7=0$ 故 $S_{12}=0$　答案为 0.

（14）$a_1=m^4C_5^1=5m^4,a_2=m^3C_5^2=10m^3$，代入 $a_2=2a_1$ 解得 $m=1$ 或 $m=0$

答案为 1.

（15）设圆柱体地面半径为 r，高为 h 则 $r^2+(\frac{h}{2})^2\le2^2$，

$4\ge\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+\frac{h^2}{4}\ge3\sqrt[3]{\frac{r^2}{2}\frac{r^2}{2}\frac{h^2}{4}}=3\sqrt[3]{\frac{r^4h^2}{16}}$ 解得 $\frac{32\sqrt{3}}{9}\ge r^2h$ 故 $V=\pi r^2h\le\frac{32\sqrt{3}\pi}{9}$

答案为 $\frac{32\sqrt{3}\pi}{9}$.

（16）直线 AP，BP 斜率记为 k_1,k_2. 设 l_2 斜率为 k，l_1 斜率为 $-\frac{1}{k}$，因为

$y'=\frac{x}{2}$ 故 $x_P=-\frac{2}{k}$，直线 AB 为 $y=kx+1$，联立直线 AB 与抛

物线方程得 $x^2-4kx-4=0$，则 $x_A+x_B=4k,x_Ax_B=-4$，

$$k^2+k_2^2=\left(\frac{\frac{x_P^2}{4}-\frac{x_A^2}{4}}{x_P-x_A}\right)^2+\left(\frac{\frac{x_P^2}{4}-\frac{x_B^2}{4}}{x_P-x_B}\right)^2=\frac{1}{16}(2x_P^2+(x_A+x_B)^2-2x_Ax_B+2x_P(x_A+x_B))$$

$$=\frac{1}{16}(16k^2+\frac{8}{k^2}-8)\ge\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

故答案为$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

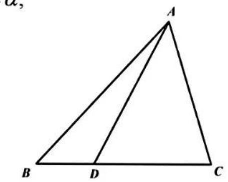
四、解答题：本大题共5小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（17-1）$b+2a\cos B=2c\Rightarrow\sin B=2\sin C-2\sin\angle BAC\cos B$

$\Rightarrow\sin B=2\sin B\cos\angle BAC$ ························3分

故$\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$即$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$ ························5分

（17-2）不妨记$\angle DAC=\alpha$,因为$\angle BAC=\angle ADC=\frac{\pi}{3}$所以$\angle DBA=\alpha$,



$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{2}{\sin\alpha}$，$\therefore AC=\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$ ············7分

又$\because\frac{3}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sin^2\alpha}$，$\therefore\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ·········9分

$\therefore AC=\sqrt{6}$ ·········10分

（18-1）**比赛采用5局3胜制**

甲赢得比赛有以下3种情况:

① 甲连赢3局. $P_1=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ ························1分

② 前3局甲2胜1负,第4局甲赢. $P_2=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}$ ···············3分

③ 前4局甲2胜2负,第5局甲赢. $P_3=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$ ··············5分

$\therefore$甲赢得比赛的概率为$\frac{17}{81}$ ························6分

（如果用一个代数式求解，部分错误不给分）

（18-2）X可以取3,4,5

$P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{3}$ ························7

分

$P(X=5)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$ ……………………8 分

$P(X=4)=1-\frac{1}{3}-\frac{8}{27}=\frac{10}{27}$ ……………………9 分

x	3	4	5
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$

……………………10 分

$E(X)=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{10}{27}+5\times\frac{8}{27}=\frac{107}{27}$ ……………………12 分

（19-1）$f'(x)=2e^x-a$ ……………………1 分

当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增； ……………………2 分

当 $a>0$ 时，$2e^x-a=0$，$x=\ln\frac{a}{2}$

$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln\frac{a}{2})$ 单调递减； ……………………3 分

$f(x)$ 在 $(\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 单调递增； ……………………4 分

（19-2）$\because x^2-ax+\frac{a^2}{4}=(x-\frac{a}{2})^2\ge 0$

$\therefore$ 需证 $f(x)\ge\sqrt{4x+1}-x^2-\frac{a^2}{4}$

即证 $2e^x-1\ge\sqrt{4x+1}$ ……………………6 分

法一：

即证 $4e^{2x}-4e^x-4x\ge 0$ ……………………8 分

令 $g(x)=e^{2x}-e^x-x$，则 $g'(x)=2e^{2x}-e^x-1=(2e^x+1)(e^x-1)$ ……………………10 分

$\therefore g(x)$ 在 $(-\frac{1}{4},0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ……………………11 分

即 $g(x)\ge g(0)=0$

$\therefore f(x)\ge\sqrt{4x+1}-x^2-\frac{a^2}{4}$ ……………………12 分

法二：

令 $g(x)=\frac{\sqrt{4x+1}+1}{e^x}$， ……………………8 分

则 $g'(x)=\frac{\frac{2}{\sqrt{4x+1}}-\sqrt{4x+1}-1}{e^x}=\frac{1-4x-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}e^x}=0$

$\therefore x=0$ ……………………10 分

$x=\frac{3}{4}$（舍去）

在 — 上单调递增，在 上单调递减； ……………………11 分

$\therefore g(x)\le g(0)=2$

$\therefore f(x)\ge\sqrt{4x+1}-x^2-\frac{a^2}{4}$ ……………………12 分

20. 法一：

（20-1）证明：取 AB 中点 M，则 $DC \underline{\underline{//}} MB$

$\therefore DM \underline{\underline{//}} BC \therefore DM=AD=AM=MB$

$\therefore BD\perp AD$ ……………………1 分

$\because DD_1\perp$ 面 $ABCD \therefore BD\perp DD_1$ ……………………2 分

$\therefore BD\perp$ 面 ADD_1A_1 ……………………3 分

$\because BF \underline{\underline{//}} DE \therefore EF\parallel BD$

$\therefore EF\perp$ 面 ADD_1A_1

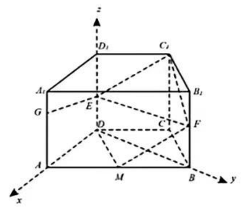
（其它方法适当给分） ……………………4 分

（20-2）建立如图直角坐标系，设 $AG=m$ 则 ……………………5 分

$E(0,0,2)$、$F(0,2\sqrt{3},2)$、$C_1(-1,\sqrt{3},4)$、$G(2,0,m)$

$\overrightarrow{EG}=(2,0,m-2)$、$\overrightarrow{EC_1}=(-1,\sqrt{3},2)$、$\overrightarrow{EF}=(0,2\sqrt{3},0)$ 设面 C_1EF 法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y+2z=0\\2\sqrt{3}y=0\end{cases}$ 得 $\vec{n}=(2,0,1)$



……………7 分

$d=|\frac{\overrightarrow{EG}\cdot\vec{n}}{\vec{n}}|=\frac{4+m-2}{\sqrt{5}}=\frac{2+m}{\sqrt{5}}$， …………9 分

$S_{\Delta C_1EF}=\sqrt{15}$， ……………………10 分

$V=\frac{5\sqrt{3}}{3}\therefore m=3$ ……………………12 分

（21-1）由题得 $b_1=1$

$\because b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=a_n$

$\therefore \frac{1}{n+1}b_{n+1}=a_{n+1}-a_n=2\frac{b_n}{n}$ ……………………2 分

$\therefore\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$为首项为 1，公比为 2 的等比数列，

$\therefore\frac{b_n}{n}=2^{n-1}$，$\therefore b_n=n\cdot 2^{n-1}$ $\therefore\frac{1}{n+1}b_{n+1}=a_{n+1}-a_n=2\frac{b_n}{n}$ …………4 分

$a_{n+1}-a_n=2^n$ 代入可得

$a_n-a_1=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})=2+2^2+\cdots+2^{n-1}$ …………6 分

$\therefore a_n=2^n-1$ ……………………8 分

（21-2）错位相减法的 $S_n=n\cdot 2^n-2^n+1$ ……………………10 分

代入 $\lambda a_n+\mu b_n=2S_n$

可得 $\lambda(2^n-1)+\mu(n\cdot 2^{n-1})=4n\cdot 2^{n-1}-2\cdot 2^n+2$

故 $\lambda=-2,\mu=4$ ……………………12 分

（22-1）易得 $a^2=2m,b^2=m,c^2=m$ 故 $F_2(\sqrt{m},0)$， ……………………2 分

又 F_2 是抛物线的焦点，$m=\sqrt{m}$， ……………………4 分

（22-2）设直线　为 $ty=x-1$ 则直线 CD 为 $-\frac{1}{t}y=x-1$

联立 $ty=x-1$，$y^2=4x$ 解得 $y^2-4ty-4=0$，由韦达定理知 $y_A+y_B=4t$，$y_Ay_B=-4$

$AB=\sqrt{t^2+1}\,|y_A-y_B|=\sqrt{t^2+1}\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=4(t^2+1)$ ……………………6 分

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot EF_2}{\frac{1}{2}F_1F_2\cdot|y_E|}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot\sqrt{1+(-\frac{1}{t})^2}\,|y_E|}{\frac{1}{2}F_1F_2\cdot|y_E|}=\frac{AB\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{t})^2}}{2}=2(1+t^2)\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{t})^2}$ ……8 分

记 $t^2=p\geq 0$

$$\frac{S_1}{S_2}=2(1+p)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{p}}=2\sqrt{p^2+3p+3+\frac{1}{p}}$$

令 $f(p)=p^2+3p+3+\frac{1}{p}$

$$f'(p)=2p+3-\frac{1}{p^2}=\frac{2p^3+3p^2-1}{p^2}=\frac{2p^3+3p^2-1}{p^2}=\frac{(p+1)(2p^2+p-1)}{p^2}=\frac{(p+1)^2(2p-1)}{p^2}$$

……………………10 分

$$f(p)\ge f(\frac{1}{2})=\frac{27}{4}$$

$\frac{S_1}{S_2}\ge 2\sqrt{\frac{27}{4}}=3\sqrt{3}$ 故最小值为 $3\sqrt{3}$

此时 $p=\frac{1}{2}$ 即 $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………12 分