山东中学联盟2021年高考考前热身押题

数学试题详细解析 2021.05

一、单选题

BABA CDCB

二、多选题

9. AB 10.ABC 11.BCD 12.BD

三、填空题

13. 2021 14.化学 15. $2\sqrt{3}$ 16. $\sqrt{2}$

圆$x^2+y^2=2$有两个交点.集合$A\cap B$有两个元素.

2、答案： A $z=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+3i-3i^2}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+i$ ，虚部是1.

3、答案：B

$T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}(\frac{1}{x})^r=C_6^r2^{6-r}x^{6-2r},r=0,1,2,3,4,5,6$

当$r=1$时，$T_2=C_6^12^5x^4=192x^4$

4、答案：A

构造函数$f(x)=\ln x+1-x,f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,当$0<x<1$时，

$f(\frac{1}{2020})>f(\frac{1}{2021})>f(\frac{1}{2022}),a>b>c$

5、答案： C

$\because 2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=-3\overrightarrow{OP},\therefore 4(|\overrightarrow{OM}|^2+|\overrightarrow{ON}|^2+2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})=9\times4,\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})+|\overrightarrow{OP}|^2$

$=\frac{1}{2}-\overrightarrow{OP}\cdot(-\frac{3}{2}\overrightarrow{OP})+4=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\times4+4=\frac{21}{2}$

6、答案：D 点M是单位圆$x^2+y^2=1$的点，

点.$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le1$，即得到$a^2+b^2\ge c^2$.

7、答案：C

问题可以转化为: $A(x,4\ln x-x^2)$是函数$y=4\ln x-x^2$图象上的点，$B(y,2y+1)$是函数$y=2x+1$上的点，$|AB|^2=(x-y)^2+(4\ln x-x^2-2y-1)^2$.当直线$y=2x+1$的平行直线与$f(x)$的图象相切时，切点到直线$y=2x+1$的距离为$|AB|$的最小值.

$f'(x)=\frac{4}{x}-2x=\frac{4-2x^2}{x}=\frac{2(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{x}$

可得到$f(x)$在$(0,\sqrt{2})$单增，$(\sqrt{2},+\infty)$单减，$f_{max}(x)=f(\sqrt{2})=2\ln2-2<0$，从而可以得到$f(x)$的图象.设斜率为2的直线与$f(x)$的图象相切，切点为$M(t,f(t))$，由

$f'(t)=2$，得到$t=1$，$f(1)=-1$，$M(1,-1)$到直线$y=2x+1$的距离即为$|AB|$的最小值.

$|AB|_{min}=\frac{4}{\sqrt{5}},|AB|^2_{min}=\frac{16}{5}.$

8、答案：B 所有的安排方法$C_5^3A_3^3+C_5^1\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_3^3=10\times6+5\times3\times6=150$若只有1人去冰球项目做志愿者，有$C_4^1(C_4^1+\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2})A_2^2=4\times(4+3)\times2=56$；若恰有2人去冰球项目做志愿者，有$C_4^2C_3^1A_2^2=6\times3\times2=36$；若有3人去冰球项目做志愿者，有$C_4^3A_2^2=4\times2=8$，所以共有56+36+8=100种安排法，所以学生甲不会被安排到冰球比赛项目做志愿者的概率为$\frac{100}{150}=\frac{2}{3}$.

9、答案：AB

A.

$a=\log_3 12,\frac{1}{a}=\log_{12}3,\frac{1}{b}=\log_{12}4,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1,a>0,b>0,a\neq b$

$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>4$

B.两直线垂直，可得 $a^2+(a-2)=0$，解得 $a=1$或$a=-2$

C.回归直线一定过样本中心点，$\bar{y}=2\bar{x}+\hat{a},\hat{a}=20-2\times 5=10$

D. $f(x)=|\cos 4x|\to y=\left|\cos 4(x+\frac{\pi}{8})\right|=\left|\cos(4x+\frac{\pi}{2})\right|=|\sin 4x|$，偶函数

10、答案：ABC

$f(x)=\sin x(\sin x-\cos x)=\sin^2 x-\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}),T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以 A 不对；

令 $x\in\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right],t=2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\sin t$ 单调递增，$f(x)$ 单减.B 不对；

$x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)$ 不是最大值或最小值，所以 C 不对；函数 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

关于点 $(-\frac{\pi}{8},0)$ 对称，$f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{1}{2}\right)$ 对称，D 正确.

11、答案 CD

当直线 l 斜率不存在时，直线方程为：$x=1$ 与抛物线交于点 $(1,\pm 2)$，与圆交于点 $(1,\pm r)$，显然满足条件；当直线斜率存在时，设直线方程为 $x=my+1\quad(m\neq 0)$,

由 $\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，

$y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$，$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=16(m^2+1)$

由 $\begin{cases}x=my+1\\ (x-1)^2+y^2=r^2\end{cases},y=\pm\sqrt{\frac{r^2}{m^2+1}}$

设 $C(x_3,y_3),D(x_4,y_4),y_3<y_4,(y_3-y_4)^2=\frac{4r^2}{m^2+1}$，

有 $|AC|=|BD|,|y_3-y_1|=|y_4-y_2|$,

当 $y_3-y_1=-(y_4-y_2)$ 时，即 $y_3+y_4=y_1+y_2=0$, 又因为 $y_1+y_2=4m$，所以 $m=0$（舍）

当 $y_3-y_1=y_4-y_2$ 时，即 $y_2-y_1=y_4-y_3$，

因为 $(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=16(m^2+1)$，$(y_3-y_4)^2=\frac{4r^2}{m^2+1}$

由此，$16(m^2+1)=\frac{4r^2}{m^2+1}$, 解得 $r=2(m^2+1)$，

显然，当 $r>2$, m 有两解，对应直线有两条. $r=2$, $m=0$, 此时直线斜率不存在，即为第一种情况，

所以当 $r>2$, 时，对应直线 l 有三条.

12、答案：BD

$EB\perp ED,EB$ 与 PE 不一定垂直，所以 A 不对；

若 $PE\perp EB$，则可证明 $PE\perp$ 平面$DEBC,DEBC$ 为正方形，棱锥 $P-BCD$ 可以补成边长为 4 的正方体，外接球直径等于正方体的体对角线长，即 $2R=4\sqrt{3},R=2\sqrt{3},V=\frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3=32\sqrt{3}\pi$,B 正确；

若 $PE\perp EB$，则可证明 $PE\perp$ 平面$DEBC$,此时 $PC=4\sqrt{3}$,若 $\angle PEC$ 为钝角，由余弦定理可得 $PC>4\sqrt{3}$，C 不正确；

由 $DE\perp PE,DE\perp EB,PE\cap EB=E$, 所以 $DE\perp$ 平面 PEB ,从而 $CB\perp$ 平面 PEB ,$CB\perp PE$ 作

$BQ \perp PE$，交PE于点Q，可证$PE \perp$平面CQB，则$CQ \perp PE$，所以二面角$C-PE-B$的平面角是$\angle CQB$，$\tan\angle CQB = \frac{CB}{BQ} = \frac{4}{BQ}$，满足$BQ \perp PE$的$BQ$的最大长度为4，所以$\tan\angle CQB$的最小值为1，即二面角$C-PE-B$的最小值为$\frac{\pi}{4}$.

13、答案：2021

设首项a_1，公比是q，则$a_n = a_1q^{n-1}$，

所以$(a_1q)^2 \cdot a_1q^{m-1} = (a_1q^{674})^3, q^{1+m} = q^{2022}, m = 2021$

14、答案：化学

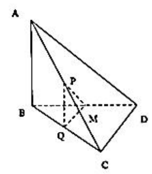
由信息①可知甲丙选的是化学和历史；由信息②可知，乙选择化学或地理.
当甲选化学，丙选历史时，乙选地理，丁选生物，此时与③矛盾；
当甲选历史，丙选化学时，乙选地理，丁选生物，符合.

15、答案：$2\sqrt{3}$

延长BD至E，使得$BD = ED$，得到平行四边形$ABCE$．在三角形BCE中，$BC = 8, EC = 4, \angle CBD = 30^\circ$，由正弦定理可得

$\angle BEC = 90^\circ . BE = 2BD = 4\sqrt{3}, BD = 2\sqrt{3}$

16、答案：$\sqrt{2}$



答案：如图，作$PQ \perp BC$于点Q，作$QM \perp BD$，交BD于点M，连接PM．得到

$PQ // AB, QM // CD, PQ \perp$平面$BCD, PQ \perp BD, QM \perp BD$，所以$PM \perp BD$.

设$CQ = x, CB = 2\sqrt{2}$，由$\frac{PQ}{AB} = \frac{CQ}{CB} \Rightarrow \frac{PQ}{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}}$，得到$PQ = \frac{x}{\sqrt{2}}, 0 \le x \le 2\sqrt{2}$，

在ΔBCD中，$\frac{BQ}{BC} = \frac{QM}{CD} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}-x}{2\sqrt{2}} = \frac{QM}{2}$，得到$QM = \frac{2\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$，

$PM = \sqrt{PQ^2 + QM^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{(8-4\sqrt{2}x+x^2)}{2}} = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 4}$，

$= \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + 2} \ge \sqrt{2}$，当且仅当$x = \sqrt{2}$时，等号成立.

$S_{\Delta PBD} = \frac{1}{2}BD \cdot PM \ge \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

17、答案：（1）$\because S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 21, \therefore a_2 = 7$ ----------（3分）

设数列$\{a_n\}$的公差是d，可得$7(7-d)(7+d) = 280, d > 0, d = 3$ ----------（4分）

$\therefore a_n = a_2 + 3(n-2) = 3n+1$ ----------（5分）

（2）$\log_2 b_n = \frac{a_n+2}{3} = \frac{3n+1+2}{3} = n+1, b_n = 2^{n+1}$ ----------（6分）

设$c_n = a_n \cdot b_n$，设$\{c_n\}$的前n项和为T_n，$c_n = (3n+1)2^{n+1}$

$T_n = 4 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^4 + \ldots\ldots + (3n+1)2^{n+1}$

$2T_n = \quad 4 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^4 + \ldots\ldots + (3n-2)2^{n+1} + (3n+1)^{n+2}$， ----------（7分）

两式子作差，得到

$-T_n = 16 + 3(2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n+1}) - (3n+1)2^{n+2}$

----------（8分）

$= 16 + 3 \cdot 2^{n+2} - 24 - (3n+1)2^{n+2}$ ----------（9分）

$T_n = (3n-2)2^{n+2} + 8$ ----------（10分）

18、答案：(1)因为 $2b-a=2c\cdot\cos A$，由正弦定理可得

$2\sin B-\sin A=2\sin C\cos A$ ——————————（1 分）

$2\sin[\pi-(A+C)]-\sin A=2\sin C\cos A$

$2\sin(A+C)-\sin A=2\sin C\cos A$ ——————————（3 分）

展开可得：$2\sin A\cos C+2\sin C\cos A-\sin A=2\sin C\cos A$

得到：$2\sin A\cos C-\sin A=0$ ——————————（4 分）

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，C 是锐角，所以 $C=\frac{\pi}{3}$ ——————（6 分）

(2)由正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$，可得 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin A, b=\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin B$,

所以 $\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin A+\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin B=4$，得 $c=\frac{2\sqrt{3}}{\sin A+\sin B}$ ——————（8 分）

因为锐角 ΔABC，所以 $0<C=\frac{2\pi}{3}-A<\frac{\pi}{2}, 0<A<\frac{\pi}{2}$，得到 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$ （9 分）

$\therefore \sin A+\sin B=\sin A+\sin(\frac{2\pi}{3}-A)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$

$=\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{6})$ ——————————（10 分）

因为 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，$\sin(A+\frac{\pi}{6})\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

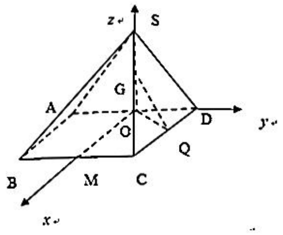
所以 $c=\frac{2\sqrt{3}}{\sin A+\sin B}\in\left[2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ ——————————（12 分）

19、答案：延长 SG 与 AD 相交于点 O，则 O 一定是 AD 的中点.易得 $SO\perp AD, GO\perp AD$.因为平面 SAD 垂直于平面 $ABCD$，两个平面的交线是 AD，所以得到 $SO\perp$ 平面 $ABCD$ ——————————（2 分）

GQ 在平面 $ABCD$ 的射影是 OQ，所以直线 GQ 与平面 $ABCD$ 所成的角是 $\angle GQO$ 在直角三角形 GQO 中，$OQ=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$\tan\angle GQO=\frac{OG}{OQ}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，解得

$OG=\frac{\sqrt{3}}{3}, SO=3OG=\sqrt{3}, SA=2$ ——————————（4 分）

$V_{S-ABCD}=\frac{1}{3}SO\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times2\times2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ——————————（6 分）



(2)法一：取 BC 的中点 M，连接 OM，以点 O 为原点，以 $\overline{OM},\overline{OD},\overline{OS}$ 的正方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $A(0,-1,0), B(2,-1,0), C(2,1,0), D(0,1,0), S(0,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(2,0,0), \overrightarrow{SA}=(0,-1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{SD}=(0,1,-\sqrt{3})$ ——————（7 分）

设平面 SAB 与平面 SCD 的法向量分别是 $\overline{m}=(x,y,z), \overline{n}=(x',y',z')$

则 $\begin{cases}2x=0\\-y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\y=-\sqrt{3}z\end{cases}$，令 $z=1, \overline{m}=(0,-\sqrt{3},1)$ ——————（9 分）

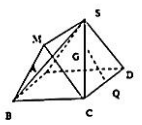
$\begin{cases}2x'=0\\ y'-\sqrt{3}z'=0\end{cases}$，$\begin{cases}x'=0\\ y'=\sqrt{3}z'\end{cases}$ 令 $z'=1,\bar{n}=(0,\sqrt{3},1)$ ------------------（11 分）

设平面 SAB 与平面 SCD 所成的角为 α，易知 α 是锐角，所以

$\cos\alpha=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，即平面 SAB 与平面 SCD 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$

------------------------------------（12 分）

（2）法二：



过点 S 作 $SM//DC,SM=DC$，将原几何体补成三棱柱 $SAD-MBC$，

$SM//DC//AB$，因为平面 SAD 垂直于平面 $ABCD$，两个平面的交线是 AD，$AB\perp AD$，所以 $AB\perp$ 平面 SAD，$SM//AB$，所以 $SM\perp$ 平面 SAD.------（9 分）

因为 $SA,SD\subset$ 平面 SAD，所以 $SA\perp SM,SD\perp SM$，------------------------（10 分）

$SA\subset$ 平面 SAB，$SD\subset$ 平面 SAB，所以 $\angle ASD$ 即为平面 SAB 与平面 SCD 所成的角，

大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.------------------------------------（12 分）

20、答案：（1）设 $H(x,y),A(x,2y)$，$\overrightarrow{BH}=(x+\sqrt{2},y),\overrightarrow{CA}=(x-\sqrt{2},2y)$ --------（1 分）

因为 $BH\perp AC$，所以 $\overrightarrow{BH}\bullet\overrightarrow{CA}=0$，即 $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+2y^2=0$ ----------（2 分）

整理得：$x^2+2y^2=2$，即 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

ΔABC 中，三顶点不可能共线，所以 $y\neq 0$，

故曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1(y\neq 0)$ ------------------------------------（4 分）

（2）若直线 l 斜率不存在，可得圆：$x^2+y^2=1$，

若直线 l 斜率为 0，可得圆：$x^2+(y-\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{16}{9}$.

两个圆的公共点为 $N(0,-1)$ ------------------------------------（6 分）

若直线 l 斜率存在且不为 0 时，设其方程为 $y=kx+\dfrac{1}{3}(k\neq 0)$，

$\begin{cases}y=kx+\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，可得 $(2k^2+1)x^2+\dfrac{4}{3}kx-\dfrac{16}{9}=0$

$\Delta>0$ 恒成立，设点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

可得韦达定理：$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{4k}{6k^2+3}\\ x_1x_2=-\dfrac{16}{18k^2+9}\end{cases}$ ------------------------------------（8 分）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP}\bullet\overrightarrow{NQ}&=(x_1,y_1+1)\bullet(x_2,y_2+1)=x_1x_2+(y_1+1)(y_2+1)\\&=x_1x_2+(kx_1+\frac{4}{3})(kx_2+\frac{4}{3})\\&=(k^2+1)x_1x_2+\frac{4}{3}k(x_1+x_2)+\frac{16}{9}\qquad\text{------------（9 分）}\\&=\frac{-16(k^2+1)}{18k^2+9}+\frac{\frac{4}{3}k(-4k)}{6k^2+3}+\frac{16}{9}\\&=\frac{-16k^2-16-16k^2+\frac{16}{9}(18k^2+9)}{18k^2+9}\\&=0\end{aligned}$$

即$NP \perp NQ$，以PQ为直径的圆经过定点$N(0,-1)$.

---------------（11 分）

综上所述，以PQ为直径的圆经过定点$N(0,-1)$.

---------------（12 分）

21、答案：（1）设“该盒零件一次检验即可出厂”为事件 A,

$$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{8\times7}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{28}{45}$$ ---------------（3 分）

①某盒 10 个零件恰好有 3 个次品的概率

$f(p)=C_{10}^3p^3(1-p)^7$, ---------------（4 分）

$f'(p)=C_{10}^3p^2(1-p)^6(3-10p)$ ---------------（5 分）

当$0<p<\frac{3}{10}$, $f'(p)>0$, 当$\frac{3}{10}<p<1$, $f'(p)<0$ ---------------（7 分）

所以当$p=\frac{3}{10}$时，$f(p)$取到最大值，故$f(p)$的最大值点为$p_0=\frac{3}{10}$.

---------------（8 分）

②由题意可知$p=p_0=\frac{3}{10}$，这盒零件中次品的个数为N，

则$N\sim B(10,\frac{3}{10})$, $E(N)=10\times\frac{3}{10}=3$ ---------------（10 分）

$E(X)=10\times10-10\times1-3\times10-3\times2=54$，

所以这盒零件最终利润的期望为 54 元 ---------------（12 分）

22、答案：

（1）$a=\frac{1}{2}$, $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}x+1$, $f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$ ---------------（1 分）

当$-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$时，$f'(x)>0$,

当$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$时，$f'(x)<0$, ---------------（2 分）

所以，$f(x)$的单调递增区间是$\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right), k\in Z$

$f(x)$的单调递减区间是$\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right), k\in Z$ ---------------（3 分）

（2）恒成立不等式等价于$ax+cosx-\sin x-1\le0$，

令$h(x)=ax+\cos x-\sin x-1$, 则由$\begin{cases}h(0)\le0\\h(\pi)\le0\\h(\frac{\pi}{2})\le0\end{cases}$可得到$a\le\frac{2}{\pi}$ ---------------（4 分）

$\because y=ax+\cos x-\sin x-1$可以看作是关于$a$的一次函数，单调递增，

$\therefore$令$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}x+\cos x-\sin x-1$，

对于$\forall a\le\frac{2}{\pi}, \forall x\in[0,\pi]$, $h(x)\le\varphi(x)$恒成立.

只需证明$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}x+\cos x-\sin x-1\le0$即可. ---------------（5 分）

$$\varphi'(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x-\cos x=\frac{2}{\pi}-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

1° 当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\in(1,\sqrt{2}]$,

则$\varphi'(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x-\cos x<\frac{2}{\pi}-1<0$, $\varphi(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，又$\varphi(x)=0$,

所以此时$\varphi(x)<0$恒成立. ---------------（6 分）

2° 当$x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$时，$\varphi'(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x-\cos x=\frac{2}{\pi}-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>0$恒成立；

---------------（7 分）

3^o 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$时，$\varphi'(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x-\cos x=\frac{2}{\pi}-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 单调递增，

$\varphi'(\frac{\pi}{2})<0,\varphi'(\frac{3\pi}{4})>0$, 所以在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$上存在唯一的$x_o$，使得$\varphi'(x_o)=0$,

当$x\in(0,x_o)$时，$\varphi'(x)<0$, 当$x\in(x_o,\pi)$时，$\varphi'(x)>0$, 所以

$\varphi(x)$ 在$x\in(0,x_o)$时单调递减，在$x\in(x_o,\pi)$时单调递增.---------------------（8 分）

$\therefore\varphi(0)=0,\varphi(\pi)=0,\varphi(x_o)<0$

$\therefore\varphi(x)<0$ 恒成立，故$h(x)\le\varphi(x)<0$恒成立，

$\therefore a\le\frac{2}{\pi}$. --------------------------------（9 分）

(3)由（2）可知$\sin x-\cos x\ge\frac{2}{\pi}x-1\Rightarrow\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\ge\frac{2}{\pi}x-1$

$\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{4})\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$

--------------------------------（10 分）

$g(x)=\sin x$，令$x-\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{15},x=\frac{4k+15}{60}\pi,k=1.2...8$,

可得到$\sin\frac{k\pi}{15}\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi}\times\frac{(4k+15)\pi}{60}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{60}(4k-15)$，---------------(11 分)

从而$\sum_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{15}\ge\frac{\sqrt{2}}{60}\sum_{k=1}^{8}(4k-15)=\frac{\sqrt{2}}{60}\left(4\times\frac{8\times(1+8)}{2}-15\times8\right)=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

即$g(\frac{\pi}{15})+g(\frac{2\pi}{15})+g(\frac{3\pi}{15})+...+g(\frac{8\pi}{15})\ge\frac{2\sqrt{2}}{5}$ 得证.--------------------（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》