

## 2020 级高三校际联合考试

### 数学试题

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数  $z = \frac{2i}{1-i}$ ，则复数  $z$  在复平面内对应点的坐标为 ( )

- A. (1, -1)      B. (-1, 1)      C. (1, 1)      D. (-1, -1)

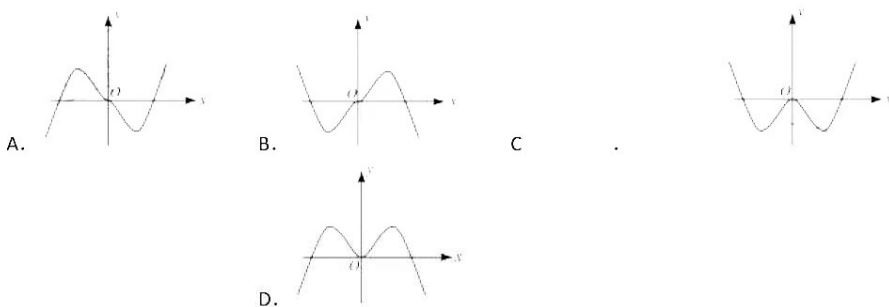
2. 已知集合  $A = \{x | 2^x < 4\}$ ， $B = \{x | (x-4)(x-1) < 0\}$ ，则  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$  ( )

- A.  $\{x | 1 < x < 2\}$       B.  $\{x | 2 < x < 4\}$       C.  $\{x | 2 \leq x < 4\}$   
D.  $\{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$

3. 不等式  $\frac{x+1}{x-5} < 2$  的解集为 ( )

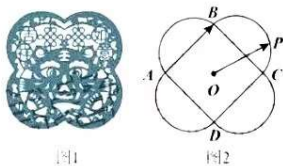
- A.  $\{x | x > 11 \text{ 或 } x < 5\}$       B.  $\{x | 5 < x < 11\}$       C.  $\{x | -1 < x < 5\}$   
D.  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$

4. 函数  $y = \left(1 - \frac{2}{1+2^x}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  的图象可能为 ( )



5. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸，它是中国古老的传统民间艺术之一。在 2022 年虎年新春来临之际，人们设计了一种由外围四个大小相等的半圆和中间正方形所构成的窗花（如图 1）。已知正方形  $ABCD$  的边长为 2，中心为  $O$ ，四个半圆的圆心均在正方形  $ABCD$  各边的中点（如图 2），

若点  $P$  在四个半圆的圆弧上运动，则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}$  的取值范围是 ( )



- A.  $[-2, 2]$  B.  $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$  C.  $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$  D.  $[-4, 4]$

6. “数列  $\{a_n\}$  为等比数列”是“数列  $\{\lg|a_n|\}$  为等差数列”的 ( )

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 正项数列  $\{a_n\}$  中,  $a_{n+1} = ka_n$  ( $k$  为常数), 若  $a_{2021} + a_{2022} + a_{2023} = 3$ , 则  $a_{2021}^2 + a_{2022}^2 + a_{2023}^2$  的取值范围是 ( )

- A.  $[3, 9]$  B.  $[3, 9]$  C.  $[3, 15]$  D.  $[3, 15]$

8. 已知平面向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 且  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ ,  $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = 2$ , 则  $|\vec{a} - \vec{c}| + 2|\vec{b} - \vec{c}|$  的最小值为 ( )

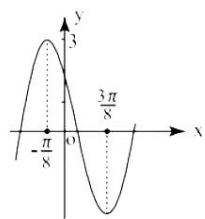
- A.  $4\sqrt{5}$  B.  $2\sqrt{17}$  C.  $2\sqrt{5}$  D.  $\sqrt{17}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的, 全部选对得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_2 = 3$ ,  $S_2 = 7$ , 则 ( )

- A.  $a_n = 5 - n$   
B. 若  $a_m + a_n = a_2 + a_{10}$ , 则  $\frac{1}{m} + \frac{16}{n}$  的最小值为  $\frac{25}{12}$   
C.  $S_n$  取最大值时,  $n = 4$  或  $n = 5$   
D. 若  $S_n > 0$ ,  $n$  的最大值为 8

10. 函数  $f(x) = 3\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的部分图象如图所示, 则 ( )



- A.  $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{5\pi}{8}\right)$   
B.  $f(x)$  图象的一条对称轴方程是  $x = -\frac{5\pi}{8}$

C.  $f(x)$  图象的对称中心是  $\left(k\pi - \frac{\pi}{8}, 0\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

D. 函数  $y = f\left(x + \frac{7\pi}{8}\right)$  是偶函数

11. 若  $a = e^{0.1}$ ,  $b = \ln \frac{11e}{10}$ ,  $c = \frac{12}{11}$ , 则 ( )

A.  $a > b$

B.  $a < c$

C.  $b < c$

D.  $a > c$

12. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(8-x) + f(4)$ , 又  $f(x+\pi)$  的图象关于点  $(-\pi, 0)$  对称, 且  $f(1) = 2022$ , 则 ( )

A. 函数  $f(x)$  的一个周期为 16

B.  $f(2023) = -2022$

C.  $f(x)$  的图象关于直线  $x=12$  对称

D.  $f(2x-1) + \pi$  的图象关于点  $\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$  对称

称

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ , 则  $\sin 2\theta + \cos^2 \theta =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $a, b$  为两不相等的实数, 若二次函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  满足  $f(a) = f(b)$ , 则  $f(2)$  的值为\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \log_4(x+2), & -2 < x \leq m \\ 2^x - 3, & x > m \end{cases}$ , 其中  $m \geq -1$ . 若存在实数  $b$ , 使得关于  $x$  的方程

$f(x) = b$  有两个不同的实数根, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 对任意闭区间  $I$ , 用  $M_I$  表示函数  $y = \cos x$  在  $I$  上的最小值. 若正数  $\alpha$  满足  $M_{[0, \alpha]} = M_{[\alpha, 2\alpha]}$ , 则正数  $\alpha$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 点  $D$  满足  $3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ , 且  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

(1) 若  $b=c$ , 求  $A$  的值;

(2) 求  $B$  的最大值.

18. (12 分).

已知等差数列  $\{a_n\}$ , 分别从下表第一、二、三行中各取一个数, 依次作为  $a_1, a_2, a_4$ , 且  $a_1,$

$a_2, a_4$  中任何两个数都不在同一列. 公比大于 1 的等比数列  $\{b_n\}$  的前三项恰为数列  $\{a_n\}$  前 5 项中

的三个项.

|     | 第一列 | 第二列 | 第三列 |
|-----|-----|-----|-----|
| 第一行 | 8   | 0   | 2   |
| 第二行 | 7   | 4   | 3   |
| 第三行 | 9   | 12  | 4   |

(1) 求数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $c_n = \frac{a_n b_n}{a_{n+1} a_{n-2}}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

19. (12 分)

设函数  $f(x) = [ax^2 - (3a+2)x + 3a+4]e^x$ .

(1) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线斜率为 0, 求实数  $a$  的值;

(2) 若  $y = f(x)$  在  $x=1$  处取得极小值, 求实数  $a$  的取值范围.

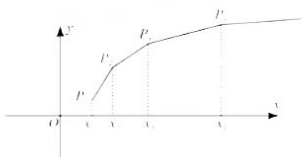
20. (12 分)

已知数列  $\{x_n\}$  是各项均为正数的等比数列, 且  $x_1 + x_2 = 3$ ,  $x_3 - x_2 = 2$ .

(1) 求数列  $\{x_n\}$  的通项公式;

(2) 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 依次连接  $P_1(x_1, 1)$ ,  $P_2(x_2, 2)$ ,  $\dots$ ,  $P_{n+1}(x_{n+1}, n+1)$ ,

得到折线  $P_1P_2, \dots, P_{n+1}$ , 求由该折线与直线  $y=0$ ,  $x=x_1$ ,  $x=x_{n+1}$  所围成的区域的面积  $T_n$ .



21. (12 分)

如图, 某公园拟划出一块平行四边形区域  $ABCD$  进行改造, 在此区域中, 将  $\angle DCB$  和  $\angle DAB$  为圆心角的两扇形区域改造为活动区域, 其他区域进行绿化, 且这两个扇形的圆弧均与  $BD$  相切.



(1) 若  $AD=40$ ,  $AB=30$ ,  $BD=10\sqrt{37}$  (长度单位: 米), 求活动区域的面积;

(2) 若扇形的半径为 10 米, 圆心角为  $\frac{3}{4}\pi$ , 则  $\angle BDA$  多大时, 平行四边形区域  $ABCD$  面积最小?

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (a+1)x + a\ln x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .



(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 已知关于  $x$  的方程  $f(x) - \frac{1}{2}x^2 - ax = 0$  有两个解  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ),

(I) 求实数  $a$  的取值范围;

(II) 若  $\lambda$  为正实数, 当  $s = \lambda(x_1 + x_2)$  时, 都有  $f'(s) > 0$ , 求  $\lambda$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线