秘密★启用前

2023年省际名校联考三(押题卷)
数学参考答案详解及评分说明

评分说明：

1. 考生如按其他方法或步骤解答，正确的，同样给分；有错的，根据错误的性质，参照评分说明中相应的规定评分。

2. 计算题只有最后答案而无演算过程的，不给分；只写出一般公式但未能与试题所给的具体条件联系的，不给分。

A卷选择题答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. B

【解析】由题意得$U=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A\cup B=\{2,3,4\}$，所以$\complement_U(A\cup B)=\{0,1,5\}$.

2. A

【解析】由$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$得$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，解得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9$，

所以$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影向量为$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\dfrac{9}{12}\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

3. C

【解析】将(2,3)代入双曲线方程得$a=1$，所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

4. A

【解析】由题可得，圆柱的高为$10\times\frac{4}{5}=8$ m，圆锥的高为$10\times\frac{1}{10}=1$ m，圆柱与圆锥的底面半径均为4 m，所以该粮仓的表面积为$2\times\pi\times4\times8+2\times\pi\times4\times\sqrt{17}=(64\pi+8\sqrt{17}\pi)\text{m}^2$.

5. D

【解析】联立$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5},\end{cases}$或$\begin{cases}\sin\alpha=-\dfrac{3}{5},\\ \cos\alpha=-\dfrac{4}{5},\end{cases}$(舍)

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{5}}=\frac{12}{35}.$$

6. B

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为q，由题意知$q>0$，又$a_3-a_1=2$，得$a_1q^2-a_1=2$，所以$a_1=\dfrac{2}{q^2-1}$，因为$a_1>0$，所以$q>1$，$a_4+a_3=a_1q^3+a_1q^2=\dfrac{2}{q^2-1}(q^3+q^2)=\dfrac{2q^2}{q-1}=2(q+1+\dfrac{1}{q-1})=2(q-1+\dfrac{1}{q-1}+2)\geqslant2(2\sqrt{(q-1)\dfrac{1}{q-1}}+2)=8$，当且仅当$q=2$时取等号.所以$a_4+a_3$的最小值为8.

7. C

【解析】根据题意要求涂色，最少涂3种颜色，最多涂5种颜色，故分三类：①涂3色：AC同色且BD同色，共有A_5^3种涂法；②涂4色：AC同色或BD同色，共有$2A_5^4$种涂法；③涂5色：5个顶点颜色各不相同，共有A_5^5种涂法．故共有$n=60+240+120=420$种涂法，而涂四色的方法有$m=240$种，由古典概型概率公式得，使用4种颜色的概率为$P=\frac{m}{n}=\frac{4}{7}$.

8. A

【解析】易知$f(x),g(x)$均为偶函数，故其图象的交点关于y轴对称．

当$x\geqslant 0$时，$g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$，故$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减．

若 $0\leqslant x<1$，则 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-3=\sqrt{2+2\sqrt{1-x^2}}-3\leqslant -1$，$g(x)\geqslant g(1)=-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)>-1$，故$f(x)$图象与$g(x)$图象在$[0,1)$上无交点．

若$x\geqslant 1$，则$f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-3$，$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，又$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，$g(1)=-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)>-1>\sqrt{2}-3=f(1)$，$g(2)=-\ln\left(\sqrt{5}+2\right)<-1<\sqrt{3}-2=f(2)$，故$f(x)$与$g(x)$图象在$[1,+\infty)$上有唯一交点．

综上，$f(x)$与$g(x)$图象有且仅有两个交点．

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. AC

【解析】由题意得，过点$(3,2)$与圆心$(2,a)$的直线与直线$x+2y-7=0$垂直，所以$\frac{2-a}{3-2}=2$，解得$a=0$，故A正确；$r=\sqrt{(3-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$，故B错误；这时圆的方程为$(x-2)^2+y^2=5$，点$(-1,-1)$到圆心的距离为$\sqrt{(-1-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{10}>\sqrt{5}$，故C正确；圆$C$被$y$轴截得的弦长$l=2\sqrt{5-2^2}=2$，故D错误．

10. BCD

【解析】

$$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(\frac{1}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x\right)\cos\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\omega x\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2\omega x-1)$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right),$$

由题$2\omega\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\omega=1$，故A选项错误；$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的最小正周期为$\pi$，故B选项正确；易知$f\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=-f(x)$，故$f(x)$图象的一个对称中心是$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，C选项正确；令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，故$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$，D选项正确．

11. BC

【解析】考虑方程$x^2-ax+1=0$的判别式$\Delta=a^2-4$,

①当$-2\leqslant a\leqslant 2$时,$\Delta\leqslant 0$,此时$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-ax+1\geqslant 0$,必有$\forall x\in\mathbf{R}$,$e^x-ax\geqslant 0$,易知$0\leqslant a\leqslant e$.这时a的取值范围为$[0,2]$.

②当$a<-2$,或$a>2$时,$\Delta>0$,方程$x^2-ax+1=0$有两根$x_1<x_2$,且$x_1x_2=1$.

当$x<x_1$,或$x>x_2$时,$x^2-ax+1>0$,必有$e^x-ax\geqslant 0$;当$x_1<x<x_2$时,$x^2-ax+1<0$,必有$e^x-ax\leqslant 0$,必有$e^{x_1}-ax_1=e^{x_2}-ax_2=0$,易知$a>0$,$x_1>0$,$x_2>0$,则$x_1-\ln x_1=\ln a=x_2-\ln x_2$,$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$,由对数均值不等式$1=\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$,得$x_1x_2<1$,与$x_1x_2=1$矛盾,不符题意.

综上,a的取值范围是$[0,2]$,故a可能的取值有$\ln 6$,$\dfrac{\pi}{2}$.

12. BD

【解析】$\alpha\alpha=(a_1^2-b_1^2-c_1^2-d_1^2)+(a_1b_1+b_1a_1+c_1d_1-d_1c_1)\mathrm{i}+(a_1c_1+c_1a_1+d_1b_1-b_1d_1)\mathrm{j}+(a_1d_1+d_1a_1+b_1c_1-c_1b_1)\mathrm{k}=(a_1^2-b_1^2-c_1^2-d_1^2)+2a_1b_1\mathrm{i}+2a_1c_1\mathrm{j}+2a_1d_1\mathrm{k}$,故选项A错误;由已知的定义可知,$\mathrm{ijk}=\mathrm{kk}=-1$,故选项B正确;取$\alpha=\mathrm{i}$,$\beta=\mathrm{j}$,得$\alpha\beta\neq\beta\alpha$,故C错误;对于选项D,由$\alpha\beta=4$,得到$\alpha\beta=(a_2-b_2-c_2-d_2)+(b_2+a_2+d_2-c_2)\mathrm{i}+(c_2+a_2+b_2-d_2)\mathrm{j}+(d_2+a_2+c_2-b_2)\mathrm{k}$,即$a_2-b_2-c_2-d_2=4$,$b_2+a_2+d_2-c_2=0$,$c_2+a_2+b_2-d_2=0$,$d_2+a_2+c_2-b_2=0$,解得$a_2=1$,$b_2=c_2=d_2=-1$,所以$\beta=1-\mathrm{i}-\mathrm{j}-\mathrm{k}$,故D正确.

B卷选择题答案

1. C　2. B　3. A　4. A　5. D　6. D　7. C　8. D　9. BC　10. BCD　11. BD　12. AD

AB卷非选择题答案

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. -15

【解析】$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\left(-\dfrac{3}{x}\right)^r=(-3)^r C_5^r x^{5-2r}$,令$5-2r=3$得$r=1$,所以$x^3$的系数为$(-3)^1C_5^1=-15$

14. $\dfrac{\pi}{6}$

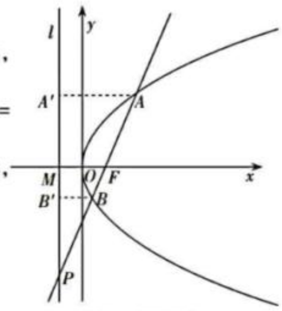
【解析】$f'(x)=2\cos 2x-1$,

令$f'(x)>0$,得$0<x<\dfrac{\pi}{6}$,或$\dfrac{5\pi}{6}<x<\pi$;令$f'(x)<0$,得$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}$,

$\therefore f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$,$\left(\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$上单调递减,

$\therefore f(x)$的极大值点为$\dfrac{\pi}{6}$.

15. $2\sqrt{2}$, 2



（第15题答图）

【解析】如图分别过 A,B 作 $AA'\perp l$，$BB'\perp l$，垂足为 A'，B'，设 $|BF|=m$，则 $|AF|=2m$，

由抛物线定义得 $|AA'|=2m$，$|BB'|=m$，$\cos\angle BAA'=\dfrac{|AA'|-|BB'|}{|AB|}=\dfrac{1}{3}$，所以 $k_{AB}=2\sqrt{2}$. 设 l 与 x 轴交于点 M，在 $\triangle AA'P$ 中，由 $|AA'|=2m$ 得 $|AP|=6m$，则 $|PF|=4m$，

所以 $\dfrac{|FM|}{|AA'|}=\dfrac{|PF|}{|PA|}=\dfrac{2}{3}$，$p=|FM|=\dfrac{2}{3}|AA'|=\dfrac{4}{3}m$，

所以 $S_{\triangle AOP}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle AMP}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}S_{\triangle AA'P}=3\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle AA'P}=9\sqrt{2}$，

由 $S_{\triangle AA'P}=\dfrac{1}{2}|AA'||A'P|=\dfrac{1}{2}\times 2m\times 4\sqrt{2}m=9\sqrt{2}$，解得 $m=\dfrac{3}{2}$，$p=\dfrac{4}{3}m=2$.

16. $8(1-\dfrac{1}{4^n})\pi$

【解析】正四面体边长为6，高为 $2\sqrt{6}$，由等体积法得 $r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，因为球 O_2 与三棱锥的三个面和球 O_1 都相切，所以用平行于底面 BCD 且与球 O_1 相切的平面截正四面体后，得到的小三棱锥仍是正四面体，球 O_2 和截得的正四面体各个面都相切，所以易得 $r_2=\left(2\sqrt{6}-2r_1\right)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，同理 $r_k=\dfrac{\sqrt{6}}{2^k}$ $(3\leqslant k\leqslant n$，且 $k\in\mathbf{N}^*)$，

$$S_{总}=4\pi(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2)=4\pi\times\frac{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}}=8(1-\frac{1}{4^n})\pi.$$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1)在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理可知：

$\cos B=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\dfrac{12+1-7}{2\times 2\sqrt{3}\times 1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…………3分

又 $\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$. …………5分

(2)若选择条件①：

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可知：$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，即 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin C}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}$，解得 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …………8分

在 $\triangle ACD$ 中，$AD<CD$，从而 $C<\angle DAC$，必有 $C<\dfrac{\pi}{2}$，又 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $C=\dfrac{\pi}{3}$. …………10分

若选择条件②：在 $\triangle ABD$ 中，$BD<AD$，$\therefore \angle BAD<B<\dfrac{\pi}{2}$，

由正弦定理可知：$\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$，即 $\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sin\angle BAD}$，解得 $\sin\angle BAD=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，…………8分

又 $\cos\angle DAC=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，$\angle BAD\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=\dfrac{\pi}{2}$，在 $\triangle ABC$ 中，$C=\pi-B-\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$.

…………10分

18. (1)在等腰梯形$ABCD$中，$AD=BC=CD=AA_1=2$，$AB=4$，过C作$CE//AD$交AB于E，则四边形$ADCE$是菱形，

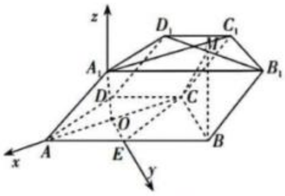
$\therefore AE=EB=2$，$\therefore \triangle BCE$是等边三角形，$\therefore \angle ABC=60°$，$\angle DCE=\angle ECB=60°$，$\angle ACD=\angle ACE=30°$，

$\therefore \angle ACB=90°$，$AC\perp BC$，………………………………………………………… 2分

又$AA_1\perp BC$，$AA_1\cap AC=A$，AA_1，$AC\subset$平面AA_1C_1C，$\therefore BC\perp$平面ACC_1A_1，又$BC\subset$平面$ABCD$，

$\therefore$平面$ABCD\perp$平面ACC_1A_1. ………………………………………………………… 4分

(2)由(1)平面$ABCD\perp$平面ACC_1A_1，$\because A_1O\perp$平面$ABCD$，$A_1C\subset$平面ACC_1A_1，$\therefore$点A_1在底面的射影O在AC上，且$A_1O\perp AC$，又$A_1O=1$，$AA_1=2$，$\therefore AO=\sqrt{3}$，由(1)知$AC=2\sqrt{3}$，$\therefore CO=\sqrt{3}$. ………………………… 6分



(第18题答图)

以O为原点，OA，OE，OA_1分别为x，y，z轴，建立如图空间直角坐标系$O-xyz$，则$O(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(-\sqrt{3},2,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-1,0)$，$A_1(0,0,1)$，则$\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-3,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-2,0)$，设$\overrightarrow{B_1M}=\lambda\overrightarrow{B_1D_1}=\lambda\overrightarrow{BD}$，$\lambda\in[0,1]$. ………………………………………………………… 8分

则$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1M}=(-\sqrt{3},0,1)+(\sqrt{3}\lambda,-3\lambda,0)=(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},-3\lambda,1)$，

易知平面$ABCD$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

设平面MBC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}y=0,\\ \sqrt{3}(\lambda-1)x-3\lambda y+z=0,\end{cases}$

取$\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，………………………………………………………… 10分

$\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|\sqrt{3}(1-\lambda)\right|}{\sqrt{1+3(1-\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，解得：$\lambda=\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{B_1M}{B_1D_1}=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………… 12分

19. (1)零假设为H_0：零件的合格率与生产车间无关，完整的列联表为

	合格品	次品	合计
A	75	25	100
B	65	35	100
合计	140	60	200

………………………………………………………… 2分

由表中数据得：

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200(75\times35-65\times25)^2}{140\times60\times100\times100}\approx2.381<3.841=x_{0.05}$ ………………… 4分

所以依据$\alpha=0.05$的独立性检验，零假设H_0成立，即不能认为零件的合格率与生产车间有关. ………………… 5分

(2)设A，B两车间生产1个零件并售出的利润分别为Y_1元、Y_2元，则Y_1，Y_2的所有可能取值为$3a-30$、$2a-30$、-34(负值表示亏损)，由题意可得A，B两车间抽检的一级品、二级品、三级品的零件个数为

	一级品	二级品	三级品
A	10	65	25
B	10	55	35

…………………………………………………………………………………… 7分

则Y_1,Y_2的分布列分别为

Y_1	$3a-30$	$2a-30$	-34
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{4}$

Y_2	$3a-30$	$2a-30$	-34
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{7}{20}$

…………………………………………………………………………………… 10分

所以A车间生产1个零件的平均利润为$E_1=\frac{1}{10}\times(3a-30)+\frac{13}{20}\times(2a-30)+\frac{1}{4}\times(-34)=\frac{8a-155}{5}$.

B车间生产1个零件的平均利润为$E_2=\frac{1}{10}\times(3a-30)+\frac{11}{20}\times(2a-30)+\frac{7}{20}\times(-34)=\frac{7a-157}{5}$.

由$\begin{cases}E_1>0\\E_2>0\end{cases}$可得$a>\frac{157}{7}$,所以当$a>\frac{157}{7}$时,两车间都能盈利. …………………… 12分

20. (1)设$F(c,0)$,当l与y轴平行时,直线l的方程为$x=c$,则$(c,\frac{3}{2})$在椭圆上,

代入椭圆方程得$\frac{c^2}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$,又因为离心率$e=\frac{1}{2}$,解得$b=\sqrt{3}$,$a=2$.

所以C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………… 3分

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由椭圆C的方程得$P(-2,0)$,

当直线斜率不存在时,$A(1,\frac{3}{2})$,$B(1,-\frac{3}{2})$,直线PA的方程为$y=\frac{1}{2}(x+2)$,令$x=4$得$D(4,3)$,$\overrightarrow{FD}=(3,3)$,同理

$\overrightarrow{FE}=(3,-3)$,$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}=0$. …………………………………………………… 5分

若直线l斜率存在时,设直线l:$y=k(x-1)$,代入椭圆方程中,得

$3x^2+4k^2(x-1)^2=12$,即$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,

$x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$, …………………………………………………… 7分

直线PA的方程为$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,令$x=4$得$D(4,\frac{6y_1}{x_1+2})$,$\overrightarrow{FD}=(3,\frac{6y_1}{x_1+2})$,

同理$\overrightarrow{FE}=(3,\frac{6y_2}{x_2+2})$, …………………………………………………… 9分

$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}=9+\frac{36k^2(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1+2)(x_2+2)}=9+36k^2\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$,

$=9+36k^2\cdot\frac{4k^2-12-8k^2+4k^2+3}{4k^2-12+16k^2+16k^2+12}=9+36k^2\cdot\frac{-9}{36k^2}=0$.

综上可得$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}$的值为0. …………………………………………………… 12分

21. (1)由$\frac{6S_1}{a_1+3}+\frac{6S_2}{a_2+3}+\cdots+\frac{6S_n}{a_n+3}=S_n$得，

当$n\geq2$时，$\frac{6S_1}{a_1+3}+\frac{6S_2}{a_2+3}+\cdots+\frac{6S_{n-1}}{a_{n-1}+3}=S_{n-1}$，

两式相减得$\frac{6S_n}{a_n+3}=a_n$，$\therefore$ $6S_n=a_n^2+3a_n(n\geq2)$，…… 2分

当$n=1$时，由$\frac{6S_1}{a_1+3}=S_1$，得$a_1=3$，也满足上式. $\therefore$ $6S_n=a_n^2+3a_n, n\in\mathbf{N}^*$. …… 3分

当$n\geq2$时，$6S_{n-1}=a_{n-1}^2+3a_{n-1}$，则$6a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+3a_n-3a_{n-1}$，

$\therefore(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-3)=0$ …… 5分

又$a_n>0$，所以$a_n-a_{n-1}=3$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_n=3n$. …… 6分

(2)证明：由(1)得$S_n=\frac{3n(n+1)}{2}$， …… 7分

$T_n=(-1)^{S_1}a_1+(-1)^{S_2}a_2+\cdots+(-1)^{S_n}a_n=-a_1-a_2+\cdots+(-1)^{\frac{3n(n+1)}{2}}a_n$

注意到当$n=4k(k\in\mathbf{N}^*)$时，

$(-1)^{S_{n-3}}a_{n-3}+(-1)^{S_{n-2}}a_{n-2}+(-1)^{S_{n-1}}a_{n-1}+(-1)^{S_n}a_n=-a_{n-3}-a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$

$=-3(n-3)-3(n-2)+3(n-1)+3n=12.$ …… 9分

$\therefore$当$n=4k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$T_n=12\times\frac{n}{4}=3n$，$|T_n|=3n<4n$.

当$n=4k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时，$T_n=T_{n+1}-a_{n+1}=3(n+1)-3(n+1)=0$，$|T_n|<4n$显然成立.

当$n=4k-2(k\in\mathbf{N}^*)$时，$T_n=T_{n+2}-a_{n+1}-a_{n+2}=3(n+2)-3(n+2)-3(n+1)=-3n-3$，

从而$n\geq3$时，$|T_n|=3n+3=4n+3-n<4n$. …… 11分

当$n=4k-3(k\in\mathbf{N}^*$且$k\geq2)$时，$T_n=T_{n-1}+a_n=3(n-1)-3n=-3$，$|T_n|=3<4n$.

$\therefore$综上可知当$n\geq3$时，有$|T_n|<4n$. …… 12分

22. (1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)-1$，$f''(x)=a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{a(x-1)}{x^2}$. …… 1分

令$f''(x)<0$，得$0<x<1$；令$f''(x)>0$，得$x>1$，故$f'(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，从而$f'(x)_{\min}$

$=f'(1)=2a-1\geq0$，$a\geq\frac{1}{2}$，故a的取值范围是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. …… 3分

(2)设曲线$y=\ln x$的切点为$(t,\ln t)$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，则曲线$y=\ln x$在点$(t,\ln t)$处的切线方程为$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$.

…… 4分

联立$\begin{cases}y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t),\\ y=a\left(x-\frac{1}{x}\right),\end{cases}$ 得$\left(\frac{1}{t}-a\right)x^2+(\ln t-1)x+a=0$，

必有$\begin{cases}\frac{1}{t}-a\neq0,\\ \Delta=(\ln t-1)^2-4a\left(\frac{1}{t}-a\right)=0.\end{cases}$ …… 6分

记函数$g(t)=(\ln t-1)^2-4a\left(\frac{1}{t}-a\right)$,由题$a\neq\frac{1}{e}$,$\therefore$ $g\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)^2\neq 0$,故当$g(t)=0$时,$t\neq\frac{1}{a}$,$\frac{1}{t}-a\neq 0$.

$g'(t)=\frac{2(\ln t-1)}{t}+\frac{4a}{t^2}=\frac{2t(\ln t-1)+4a}{t^2}$,

记$h(t)=2t(\ln t-1)+4a$,$h'(t)=2(\ln t-1)+2=2\ln t$,

令$h'(t)<0$,得$0<t<1$;令$h'(t)>0$,得$t>1$,故$h(t)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

当$0<a<\frac{1}{2}$,且$a\neq\frac{1}{e}$时,$h(1)=4a-2<0$,$h(e)=4a>0$,当$t\to 0$时,$h(t)\to 4a$,

故存在$0<t_1<1<t_2<e$,使得$h(t_1)=h(t_2)=0$,

当$0<t<t_1$,或$t>t_2$时,$h(t)>0$,$g'(t)>0$;当$t_1<t<t_2$时,$h(t)<0$,$g'(t)<0$,

故$g(t)$在$(0,t_1)$,$(t_2,+\infty)$上单调递增,在(t_1,t_2)上单调递减. ······························ 8分

由$h(t_1)=0$,得$a=\frac{t_1(1-\ln t_1)}{2}$,代入$g(t_1)=(\ln t_1-1)^2-4a\left(\frac{1}{t_1}-a\right)$并整理得:

$g(t_1)=(\ln t_1-1)\left[\frac{1}{2}(t_1^2+1)\ln t_1^2-t_1^2+1\right]$,

同理$g(t_2)=(\ln t_2-1)\left[\frac{1}{2}(t_2^2+1)\ln t_2^2-t_2^2+1\right]$,

记$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+1)\ln x-x+1$,由(1)知$\varphi(x)$为增函数,

$\because$ $0<t_1<1<t_2<e$,

$\therefore$ $\varphi(t_1^2)<\varphi(1)=0$,$\varphi(t_2^2)>\varphi(1)=0$,$\therefore$ $g(t_1)=(\ln t_1-1)\varphi(t_1^2)>0$,$g(t_2)=(\ln t_2-1)\varphi(t_2^2)<0$, ············ 10分

又$\because$ $g(e^2)=1-4a\left(\frac{1}{e^2}-a\right)>1-\frac{4a}{e^2}>1-\frac{2}{e^2}>0$,当$t\to 0$时,$g(t)\to-\infty$,

$\therefore$ $g(t)$有三个零点,

$\therefore$ 存在三条直线l_1,l_2,l_3是曲线$y=\ln x$的切线,也是曲线$y=a\left(x-\frac{1}{x}\right)$的切线. ······························ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。