

## 2021 年秋季高三数学（文）开学摸底考试卷 01

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 分数\_\_\_\_\_

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $A = \left\{ x \mid \frac{x+2}{x-1} \leq 0 \right\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - x - 2 < 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $[-2, 2)$       B.  $(-1, 1]$       C.  $(-1, 1)$       D.  $(-1, 2)$

2. 若虚数  $z$  满足  $z(1+i) = |z|^2$ , 则  $z =$

- A.  $1-i$       B.  $1+i$       C.  $-1-i$       D.  $-1+i$

3. 已知命题  $p: \forall x \in R, x^2 - x + 1 < 0$ ; 命题  $q: \exists x \in R, x^2 > 2^x$ . 则下列命题中为真命题的是

- A.  $p \wedge q$       B.  $(\neg p) \wedge q$       C.  $p \wedge (\neg q)$       D.  $(\neg p) \wedge (\neg q)$

4. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 异面直线  $AB_1$  与  $BD$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{6}$

5. 在五场篮球比赛中, 甲、乙两名运动员得分的茎叶图如图所示. 下列说法正确的是

甲			乙
2	1	0	
	0	1	1
		2	2 3 4
8	9	3	0

- A. 甲得分的中位数和极差都比乙大  
 B. 甲得分的中位数比乙小, 但极差比乙大  
 C. 甲得分的中位数和极差都比乙小  
 D. 甲得分的中位数比乙大, 但极差比乙小

6. 已知  $a = 2^{\sqrt{3}}$ ,  $b = \sqrt{3}$ ,  $c = \log_2 3$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为( )

- A.  $b > a > c$       B.  $a > c > b$       C.  $a > b > c$       D.  $b > c > a$

7. 下列函数为奇函数的是

- A.  $f(x) = x^3 + 3x^2$       B.  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

C.  $f(x) = x \sin x$

D.  $f(x) = \ln \frac{3+x}{3-x}$

8. 将函数  $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$  的图象上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍 (纵坐标不变), 再将所得到的图

象向右平移  $m(m > 0)$  个单位长度, 得到函数  $g(x)$  的图象. 若  $g(x)$  为奇函数, 则  $m$  的最小值为

A.  $\frac{\pi}{18}$

B.  $\frac{\pi}{9}$

C.  $\frac{\pi}{6}$

D.  $\frac{\pi}{3}$

9. 在圆  $x^2 + y^2 = 4$  内任取一点, 则该点到直线  $x + y - 2\sqrt{2} = 0$  的距离小于 1 的概率为

A.  $\frac{1}{3}$

B.  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}$

C.  $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

D.  $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

10. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c, A = 2B$ , 角  $C$  的平分线交对边  $AB$  于  $D$ , 且

$CD$  将三角形的面积分成 3:4 两部分, 则  $\cos B =$

A.  $\frac{1}{3}$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{2}{3}$

D.  $\frac{3}{4}$

11. 已知  $O$  为椭圆  $C$  的中心,  $F$  为  $C$  的一个焦点, 点  $M$  在  $C$  外,  $\overline{MO} = 3\overline{OF}$ , 经过  $M$  的直线  $l$  与  $C$  的

一个交点为  $N$ ,  $\triangle MNF$  是有一个内角为  $120^\circ$  的等腰三角形, 则  $C$  的离心率为

A.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.  $\sqrt{3} - 1$

D.  $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

12. 已知函数  $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}(m+1)x^2 - x$  有两个极值点, 则实数  $m$  的取值范围为

A.  $(-\frac{1}{e}, 0)$

B.  $(-1, \frac{1}{e} - 1)$

C.  $(-\infty, \frac{1}{e} - 1)$

D.  $(-1, +\infty)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (-1, m)$ , 且  $\vec{a}$  与  $\vec{a} + \vec{b}$  垂直, 则  $m =$  \_\_\_\_.

14. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $B = \frac{\pi}{3}, a = 2, b = \sqrt{3}$ , 则  $\triangle ABC$  的面

积为 \_\_\_\_.

15. 将满足  $\begin{cases} 2x + y - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \leq -1 \end{cases}$  的封闭图形绕  $y$  轴旋转一周所得的几何体的主视图面积为 \_\_\_\_.

16. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  交  $C$  的右支于  $A, B$

两点, 且  $\overline{AB} \cdot \overline{AF_1} = 0, 12|\overline{AB}| = 5|\overline{AF_1}|$ , 则  $C$  的离心率为 \_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考

生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答. (一) 必考题: 共 60 分.

17. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1=1$ ,  $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_n}{n} = n(n-2)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

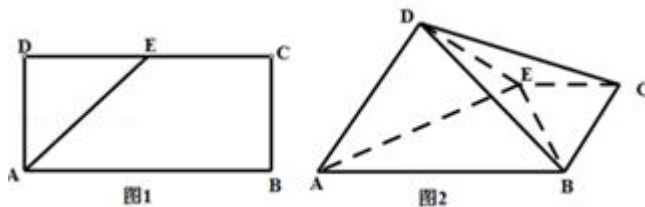
(2) 若  $a_1, a_k, S_{k+2}$  成等比数列,  $k \in \mathbb{N}^*$ , 求  $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{k^2}}$  的值.

18. 2020年8月, 习近平总书记对制止餐饮浪费行为作出重要指示, 要求进一步加强宣传教育, 切实培养节约习惯, 在全社会营造浪费可耻、节约光荣的氛围. 为贯彻总书记指示, 某学校食堂从学生中招募志愿者, 协助食堂宣传节约粮食的相关活动. 现有高一63人、高二42人, 高三21人报名参加志愿活动. 根据活动安排, 拟按年级采用分层抽样的方法, 从已报名的志愿者中抽取12名志愿者, 参加为期20天的第一期志愿活动.

(1) 第一期志愿活动需从高一、高二、高三报名的学生中各抽取多少人?

(2) 现在要从第一期志愿者中的高二、高三学生中抽取2人粘贴宣传标语, 求抽取的两人都是高二学生的概率.

19. 如图1, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ,  $BC=1$ ,  $E$  是  $DC$  的中点; 如图2, 将  $\triangle DAE$  沿  $AE$  折起, 使折后平面  $DAE \perp$  平面  $ABCE$ .



(1) 若平面  $ABD$  与平面  $CED$  的交线为  $l$ , 求证:  $CE \parallel l$ ;

(2) 求证:  $BE \perp$  平面  $ADE$ ;

(3) 求点  $C$  到平面  $BDE$  的距离.

20. 设  $O$  为坐标原点, 抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 点  $M(a, 4)$  在  $C$  上,  $|MF| = 4$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过点  $F$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 若  $l$  与圆  $H: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  相切, 求  $\triangle AOB$  的面积.

21. 已知函数  $f(x) = a \ln x + \frac{a-1}{x} - x$ , 其中  $a > 0$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的极值;

(2) 设  $m \in \mathbb{Z}$ , 当  $a=1$  时, 若不等式  $f(x) < m - (x-2)e^x$  对任意  $x \in (0, 1]$  恒成立, 求  $m$  最小值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. [选

修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 以直角坐标原点  $O$  为极点, 以  $x$  轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 并在两种坐标系中取相同的长

度单位, 已知曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho = 4\cos\theta$ , 曲线  $C_2$  的参数方程为  $\begin{cases} x = m + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数  $0 < t < \pi$ ),

射线  $\theta = \varphi$ ,  $\theta = \varphi + \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$  分别与曲线  $C_1$  交于极点  $O$  外的三点  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

(1) 求  $\frac{|OB| + |OC|}{|OA|}$  的值;

(2) 当  $\varphi = \frac{\pi}{12}$  时,  $B$ ,  $C$  两点在曲线  $C_2$  上, 求  $m$  与  $\alpha$  的值.

23. 已知函数  $f(x) = |x-a| + |x+2b|$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ).

(1) 若  $a=1$ ,  $b=1$ , 求不等式  $f(x) \leq 5$  的解集;

(2) 设函数  $f(x)$  的最小值为  $m$ , 当  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  时, 求  $m$  的取值范围.