

2021 年秋季高三数学（文）开学摸底考试卷 01

班级_____ 姓名_____ 分数_____

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x+2}{x-1} \leq 0 \right\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 2 < 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $[-2, 2)$ B. $(-1, 1]$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, 2)$

2. 若虚数 z 满足 $z(1+i) = |z|^2$, 则 $z =$

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. $-1-i$ D. $-1+i$

3. 已知命题 $p: \forall x \in R, x^2 - x + 1 < 0$; 命题 $q: \exists x \in R, x^2 > 2^x$. 则下列命题中为真命题的是

- A. $p \wedge q$ B. $(\neg p) \wedge q$ C. $p \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 异面直线 AB_1 与 BD 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

5. 在五场篮球比赛中, 甲、乙两名运动员得分的茎叶图如图所示. 下列说法正确的是

甲			乙
2	1	0	
	0	1	1
		2	2 3 4
8	9	3	0

- A. 甲得分的中位数和极差都比乙大
 B. 甲得分的中位数比乙小, 但极差比乙大
 C. 甲得分的中位数和极差都比乙小
 D. 甲得分的中位数比乙大, 但极差比乙小

6. 已知 $a = 2^{\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \log_2 3$, 则 a, b, c 的大小关系为()

- A. $b > a > c$ B. $a > c > b$ C. $a > b > c$ D. $b > c > a$

7. 下列函数为奇函数的是

- A. $f(x) = x^3 + 3x^2$ B. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

C. $f(x) = x \sin x$

D. $f(x) = \ln \frac{3+x}{3-x}$

8. 将函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍 (纵坐标不变), 再将所得到的图象向右平移 $m(m > 0)$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 若 $g(x)$ 为奇函数, 则 m 的最小值为

A. $\frac{\pi}{18}$

B. $\frac{\pi}{9}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{3}$

9. 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内任取一点, 则该点到直线 $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 的距离小于 1 的概率为

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}$

C. $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

D. $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, A = 2B$, 角 C 的平分线交对边 AB 于 D , 且 CD 将三角形的面积分成 3:4 两部分, 则 $\cos B =$

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

11. 已知 O 为椭圆 C 的中心, F 为 C 的一个焦点, 点 M 在 C 外, $\overline{MO} = 3\overline{OF}$, 经过 M 的直线 l 与 C 的一个交点为 N , $\triangle MNF$ 是有一个内角为 120° 的等腰三角形, 则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3} - 1$

D. $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

12. 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}(m+1)x^2 - x$ 有两个极值点, 则实数 m 的取值范围为

A. $(-\frac{1}{e}, 0)$

B. $(-1, \frac{1}{e} - 1)$

C. $(-\infty, \frac{1}{e} - 1)$

D. $(-1, +\infty)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (-1, m)$, 且 \vec{a} 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 垂直, 则 $m =$ ____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{3}, a = 2, b = \sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ____.

15. 将满足 $\begin{cases} 2x + y - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$ 的封闭图形绕 y 轴旋转一周所得的几何体的主视图面积为 ____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线 l 交 C 的右支于 A, B 两点, 且 $\overline{AB} \cdot \overline{AF_1} = 0, 12|\overline{AB}| = 5|\overline{AF_1}|$, 则 C 的离心率为 ____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答. (一) 必考题: 共 60 分.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_n}{n} = n(n-2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

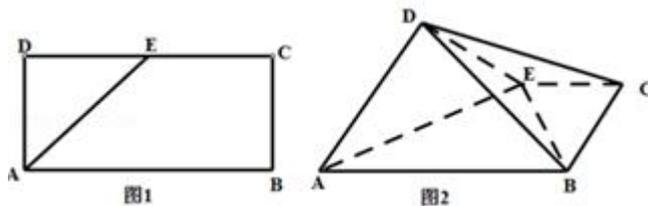
(2) 若 a_1, a_k, S_{k+2} 成等比数列, $k \in \mathbb{N}^*$, 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{k^2}}$ 的值.

18. 2020年8月, 习近平总书记对制止餐饮浪费行为作出重要指示, 要求进一步加强宣传教育, 切实培养节约习惯, 在全社会营造浪费可耻、节约光荣的氛围. 为贯彻总书记指示, 某学校食堂从学生中招募志愿者, 协助食堂宣传节约粮食的相关活动. 现有高一63人、高二42人, 高三21人报名参加志愿活动. 根据活动安排, 拟按年级采用分层抽样的方法, 从已报名的志愿者中抽取12名志愿者, 参加为期20天的第一期志愿活动.

(1) 第一期志愿活动需从高一、高二、高三报名的学生中各抽取多少人?

(2) 现在要从第一期志愿者中的高二、高三学生中抽取2人粘贴宣传标语, 求抽取的两人都是高二学生的概率.

19. 如图1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=1$, E 是 DC 的中点; 如图2, 将 $\triangle DAE$ 沿 AE 折起, 使折后平面 $DAE \perp$ 平面 $ABCE$.



(1) 若平面 ABD 与平面 CED 的交线为 l , 求证: $CE \parallel l$;

(2) 求证: $BE \perp$ 平面 ADE ;

(3) 求点 C 到平面 BDE 的距离.

20. 设 O 为坐标原点, 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $M(a, 4)$ 在 C 上, $|MF| = 4$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 若 l 与圆 $H: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 相切, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

21. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{a-1}{x} - x$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 设 $m \in \mathbb{Z}$, 当 $a=1$ 时, 若不等式 $f(x) < m - (x-2)e^x$ 对任意 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 求 m 最小值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. [选

修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 以直角坐标原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 并在两种坐标系中取相同的长

度单位, 已知曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$, 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = m + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数 $0 < t < \pi$),

射线 $\theta = \varphi$, $\theta = \varphi + \frac{\pi}{4}$, $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$ 分别与曲线 C_1 交于极点 O 外的三点 A , B , C .

(1) 求 $\frac{|OB| + |OC|}{|OA|}$ 的值;

(2) 当 $\varphi = \frac{\pi}{12}$ 时, B , C 两点在曲线 C_2 上, 求 m 与 α 的值.

23. 已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+2b|$ ($a > 0$, $b > 0$).

(1) 若 $a=1$, $b=1$, 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(2) 设函数 $f(x)$ 的最小值为 m , 当 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 时, 求 m 的取值范围.