

2023 高考临考信息卷

数学试卷

班级 _____ 姓名 _____

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上.
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

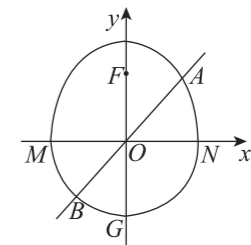
一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- 已知集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $N = \{x | y = \sqrt{1 - \ln x}\}$, 则 $M \cup N =$
 A. $(-\infty, e]$ B. $(0, 2)$ C. $(-1, e]$ D. $(-1, 2)$
- 已知复数 z 满足 $(1 - 2i)z = |3 - 4i|$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$
 A. $-1 - 2i$ B. $-1 + 2i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$
- 2023 年 3 月 24 日是第 28 个“世界防治结核病日”,我国的宣传主题是“你我共同努力,终结结核流行”,呼吁社会各界广泛参与,共同终结结核流行,维护人民群众的身体健康.已知某种传染疾病的患病率为 5%,通过验血诊断该病的误诊率为 2%,即非患者中有 2%的人诊断为阳性,患者中有 2%的人诊断为阴性.若随机抽取一人进行验血,则其诊断结果为阳性的概率为
 A. 0.46 B. 0.046 C. 0.68 D. 0.068
- 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 焦点 F 的直线交抛物线 C 于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点,以线段 AB 为直径的圆的圆心为 O_1 ,半径为 r ,点 O_1 到 C 的准线 l 的距离与 r 的积为 25,则 $r(x_1 + x_2) =$
 A. 40 B. 30 C. 25 D. 20
- 根据《民用建筑工程室内环境污染控制标准》,文化娱乐场所室内甲醛浓度 $\leq 0.1 \text{ mg/m}^3$ 为安全范围.已知某新建文化娱乐场所施工中使用了甲醛喷剂,处于良好的通风环境下时,竣工 1 周后室内甲醛浓度为 6.25 mg/m^3 ,3 周后室内甲醛浓度为 1 mg/m^3 ,且室内甲醛浓度 $\rho(t)$ (单位: mg/m^3) 与竣工后保持良好通风的时间 $t (t \in \mathbf{N}^*)$ (单位:周) 近似满足函数关系式 $\rho(t) = e^{at+b}$,则该文化娱乐场所的甲醛浓度若要达到安全开放标准,竣工后至少需要放置的时间为
 A. 5 周 B. 6 周 C. 7 周 D. 8 周
- 在轴截面顶角为直角的圆锥内,作一内接圆柱,若圆柱的表面积等于圆锥的侧面积,则圆柱的底面半径与圆锥的底面半径的比值为
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

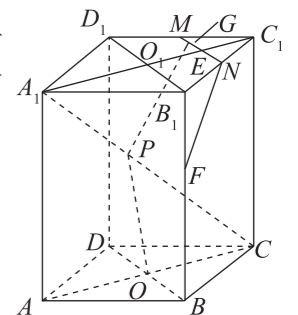
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,点 M 是双曲线右支上一点,且 $MF_1 \perp MF_2$,延长 MF_2 交双曲线 C 于点 P .若 $|MF_1| = |PF_2|$,则双曲线 C 的离心率为
 A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 90^\circ, AB = 4, AC = 4\sqrt{3}$, P, Q 是平面 ABC 上的动点,且 $AP = AQ = PQ = 2$, M 是边 BC 上一点,则 $\vec{MP} \cdot \vec{MQ}$ 的最小值为
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

- 下列结论正确的有
 A. 若随机变量 ξ, η 满足 $\eta = 2\xi + 1$, 则 $D(\eta) = 2D(\xi) + 1$
 B. 若随机变量 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$, 且 $P(\xi < 6) = 0.84$, 则 $P(3 < \xi < 6) = 0.34$
 C. 若样本相关系数 r 的绝对值越接近 1, 则成对样本数据的线性相关程度越强
 D. 按从小到大顺序排列的两组数据:甲组: 27, 30, 37, m , 40, 50; 乙组: 24, n , 33, 44, 48, 52. 若这两组数据的第 30 百分位数、第 50 百分位数都分别对应相等, 则 $m + n = 67$
- 2022 年 12 月,神舟十四号返回舱成功着陆,返回舱是宇航员返回地球的座舱,返回舱的轴截面可近似看作是由半圆和半椭圆(都包含 M, N 点)组成的“曲圆”,半圆的圆心在坐标原点,半圆所在的圆过椭圆的焦点 $F(0, 3)$, 椭圆的短轴长等于半圆的直径,如图,在平面直角坐标系中,下半圆与 y 轴交于点 G .若过原点 O 的直线与上半椭圆交于点 A , 与下半圆交于点 B , 则



- 椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ B. $\triangle AFG$ 的周长为 $6 + 6\sqrt{2}$
 C. $\triangle ABF$ 面积的最大值是 $\frac{9}{2}$ D. 线段 AB 长度的取值范围是 $[6, 3 + 3\sqrt{2}]$
- 如图,四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形,侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$,三棱锥 $A_1 - BCD$ 的体积是 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$,底面 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心分别是 O 和 O_1 , E 是 O_1C_1 的中点,过点 E 的平面 α 分别交 BB_1, B_1C_1, C_1D_1 于点 F, N, M ,且 $BD \parallel$ 平面 α , G 是线段 MN 上任意一点(含端点), P 是线段 A_1C 上任意一点(含端点), 则
 A. 侧棱 AA_1 的长为 $\sqrt{6}$
 B. 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积是 40π
 C. 当 $\frac{B_1F}{BB_1} = \frac{2}{5}$ 时,平面 α 截四棱柱所得的截面是六边形
 D. $PO + PG$ 的最小值是 5



12. 已知 $a > b, c > d, \frac{e^a}{a+1} = \frac{e^b}{b+1} = 1.01, (1-c)e^c = (1-d)e^d = 0.99$, 则

- A. $a+b > 0$ B. $c+d > 0$ C. $a+d > 0$ D. $b+c > 0$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 的顶点为 O , 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与圆 $x^2 + y^2 = 9$

相交于点 $(\frac{3\sqrt{5}}{5}, t)$, 则 $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) =$ _____.

14. 已知多项式 $(x-2)^5 + (x-1)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5 + a_6x^6$, 则 $a_1 =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} + k(2\ln x - x)$ 和 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 若 $g(x)$ 的极小值点是 $f(x)$ 的唯一极值

点, 则实数 k 的最大值为 _____.

16. “0,1 数列”是每一项均为 0 或 1 的数列, 在通信技术中应用广泛. 设 A 是一个“0,1 数列”, 定义数列 $f(A)$: 数列 A 中每个 0 都变为“1,0,1”, A 中每个 1 都变为“0,1,0”, 所得到的新数列.

例如数列 $A: 1, 0$, 则数列 $f(A): 0, 1, 0, 1, 0, 1$. 已知数列 $A_1: 1, 0, 1, 0, 1$, 且数列 $A_{k+1} = f(A_k), k=1, 2, 3, \dots$, 记数列 A_k 的所有项之和为 S_k , 则 $S_k + S_{k+1} =$ _____.

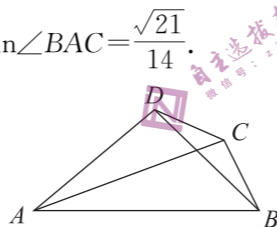
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AC = \sqrt{7}, AB = 3, \angle DAC = \angle BAC, \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

(1) 求边 BC ;

(2) 若 $\angle CDA = \frac{2\pi}{3}$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.



18. (本小题满分 12 分)

在各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1}^2 = a_n(a_{n+1} + 2a_n)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \sqrt{\log_2 a_{n+1}} + \log_2 a_{n+1} \cdot \sqrt{\log_2 a_n}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq S_n < 1.$$

19. (本小题满分 12 分)

2023 年 3 月某学校举行了普通高中体育与健康学业水平合格性考试, 考试分为体能测试和技能测试, 其中技能测试要求每个学生在篮球运球上篮、羽毛球对拉高远球和游泳 3 个项目中任意选择一个参加. 某男生为了在此次体育学业考试中取得优异成绩, 决定每天训练一个技能项目. 第一天在 3 个项目中任意选一项开始训练, 从第二天起, 每天都是从前一天没有训练的 2 个项目中任意选一项训练.

(1) 若该男生进行了 3 天训练, 求第三天训练的是“篮球运球上篮”的概率;

(2) 设该男生在考前最后 6 天训练中选择“羽毛球对拉高远球”的天数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2, P 是椭圆上一动点(与左、右

顶点不重合), $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 椭圆的离心率是 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过 $H(4, 0)$ 作斜率不为 0 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 过 B 作垂直于 x 轴的直线交椭圆

于另一点 Q , 连接 AQ , 设 $\triangle ABQ$ 的外心为 G , 求证: $\frac{|AQ|}{|GF_2|}$ 为定值.

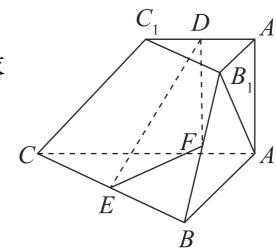
21. (本小题满分 12 分)

在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABC, AB = AC = 2, AA_1 = A_1B_1 = 1, AB_1 \perp A_1C_1,$

E, F 分别是 BC, BB_1 的中点, D 是棱 A_1C_1 上的动点.

(1) 求证: $AB_1 \perp DE$;

(2) 若 D 是线段 A_1C_1 的中点, 平面 DEF 与 A_1B_1 的交点记为 M , 求平面 AMC 与平面 AME 夹角的余弦值.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 > 2x_2$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $e \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2}\right) > 4\sqrt{2}$.