

2018 年全国高中数学联赛（吉林赛区）预赛
暨 2018 年吉林省高中数学联赛试题

(2018 年 5 月 20 日 星期日 上午 8:30—11:00)

题号	一	二	三 (13)	三 (14)	三 (15)	三 (16)	总分
得分							
评卷人							
复核人							

考生注意：本试卷共计 4 页，16 道题，满分 150 分

得分	<p>一、选择题（本题共 6 个小题，每小题 5 分，满分 30 分）</p> <p>本题共有 6 个小题，每小题均给出 (A)、(B)、(C)、(D) 四个结论，其中有且仅有一个是正确的，请将正确答案的代表字母填在题后的括号内。每小题选对得 5 分；不选、选错或多选一律得 0 分。</p>
----	--

- 集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid \log_2 x \leq 2\}$ 的真子集个数为. []
 (A) 7 (B) 8 (C) 15 (D) 16
- 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形， $PA=3$ ， $PB=4$ ， $PC=5$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为. []
 (A) 3 (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{11}$ (D) $2\sqrt{3}$
- 已知函数 $f(x)$ 满足： $f(1) = \frac{1}{4}$ ， $4f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ ($x, y \in \mathbf{R}$)，则 $f(2019) =$ [].
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$
- 已知 $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ ，则对 $\forall x \in \mathbf{R}$ ，下列说法中错误的是 [].
 (A) $f(x) \geq \frac{1}{3} \sin x$ (B) $|f(x)| \leq |x|$
 (C) $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $f(\pi+x) + f(\pi-x) = 0$

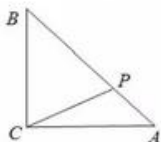
5. 已知 $f(x) = \frac{(2^x + 1)^2}{2^x \cdot x} + 1$ 在 $[-2018, 0) \cup (0, 2018]$ 上的最大值为 M ，最小值为 N ，
则 $M + N = [\quad]$.
(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0
6. 设 $x > 0, y > 0, z > 0$ ，满足 $x + y = xy$ ， $x + y + z = xyz$ ，则 z 的取值范围是 $[\quad]$.
(A) $(0, \sqrt{3}]$ (B) $(1, \sqrt{3}]$ (C) $(0, \frac{4}{3}]$ (D) $(1, \frac{4}{3}]$

得分

二、填空题 (本题共 6 个小题，每小题 5 分，满分 30 分)

请将答案写在题中横线上，各小题只要求直接写出结果.

7. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} + \log_2 \left(\frac{x+3}{x-1} - 2 \right)$ 的定义域为 _____.
8. 已知圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ ，若直线 $y = kx - 2$ ($k \in \mathbf{R}$) 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，则 k 的最大值等于 _____.
9. 如图，在直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ， $AC = BC = 2$ ，点 P 是斜边 AB 上一点，且 $BP = 2PA$ ，则 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} =$ _____.



10. 已知点 P 在直线 $x + 2y - 1 = 0$ 上，点 Q 在直线 $x + 2y + 3 = 0$ 上， PQ 的中点为 $M(x_0, y_0)$ ，且 $y_0 > x_0 + 2$ ，则 $\frac{y_0}{x_0}$ 的取值范围是 _____.
11. 若实数 a, b 满足条件 $\begin{cases} a + b - 2 \geq 0 \\ b - a - 1 \leq 0 \\ a \leq 1 \end{cases}$ ，则 $\frac{a+2b}{2a+b}$ 的最大值等于 _____.

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_n^2 - a_{n-1}^2 = p$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, p 为常数)，则称 $\{a_n\}$ 为“等方差数列”. 下列是对“等方差数列”的判断：

- ① 数列 $\{(-1)^n\}$ 是等方差数列；
② 若 $\{a_n\}$ 是等方差数列，则 $\{a_n^2\}$ 是等差数列；
③ 若 $\{a_n\}$ 是等方差数列，则 $\{a_{kn}\}$ ($k \in \mathbf{N}^*$, k 为常数) 也是等方差数列；
④ 若 $\{a_n\}$ 既是等方差数列，又是等差数列，则该数列为常数列.

其中正确命题序号为 _____ (将所有正确的命题序号填在横线上)

2018 全国高中数学联赛 (吉林赛区) 预赛试题第 2 页 (共 4 页)

得分

三、解答题

(本题共 4 道大题, 其中 13、14、15 每题 25 分, 16 题 15 分, 满分 90 分)

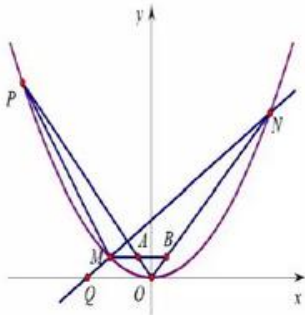
13. 已知函数 $f(x) = 4\cos x \cdot \sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) + a$ 的最大值为 2.

(I) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 的单调递减区间.

14. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且满足 $3a_5 = 8a_{12} > 0$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 问: n 为何值时, S_n 取得最大值, 说明理由.

15. 已知抛物线 $y = ax^2$ 过点 $P(-1, 1)$, 过点 $Q\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 作斜率大于 0 的直线 l 交抛物线于 M, N 两点 (点 M 在 Q, N 之间), 过点 M 作 x 轴的平行线, 交 OP 于 A , 交 ON 于 B , $\triangle PMA$ 与 $\triangle OAB$ 的面积分别记为 S_1, S_2 , 比较 S_1 与 $3S_2$ 的大小, 说明理由.



16. 设 $x, y, z \geq 0$, 且至多有一个为 0, 求

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2 + 256yz}{y^2 + z^2}} + \sqrt{\frac{y^2 + 256zx}{z^2 + x^2}} + \sqrt{\frac{z^2 + 256xy}{x^2 + y^2}}$$

的最小值.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注