

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试(文史类)

2017.3

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

(1) 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 < 4\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{0, 1\}$ (B) $\{-1, 0, 1, 2\}$
(C) $\{-1, 0, 1\}$ (D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(2) 若 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - y \leq 0, \\ x + y \leq 3, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 则 $y - x$ 的最大值为

- (A) 0 (B) 3
(C) 4 (D) 5

(3) 执行如图所示的程序框图,若输入 $m=4, n=6$, 则输出 $a =$

- (A) 4 (B) 8
(C) 12 (D) 16

(4) 已知直线 l 过定点 $(0, 1)$, 则“直线 l 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 相切”是“直线 l 的斜率为 $\frac{3}{4}$ ”的

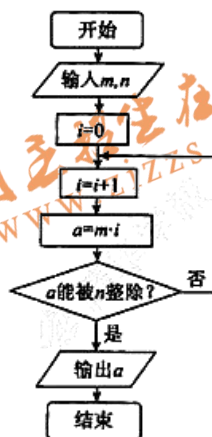
- (A) 充分不必要条件
(B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 2, \\ \log_2 x - a, & x > 2 \end{cases}$ 有两个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是

- (A) $[-1, 0)$ (B) $(1, 2]$
(C) $(1, +\infty)$ (D) $(2, +\infty)$

(6) 设抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 为抛物线上一点, $PA \perp l$, A 为垂足. 如果直线 AF 的斜率为 $\sqrt{3}$, 那么 $|PF| =$

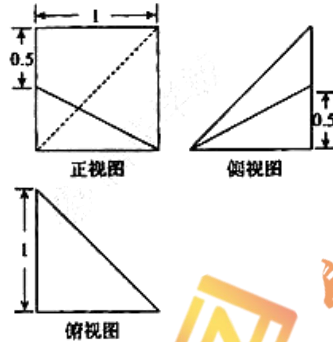
- (A) 8 (B) 16 (C) $4\sqrt{3}$ (D) $8\sqrt{3}$



第(3)题图



(7) 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的底面的面积是

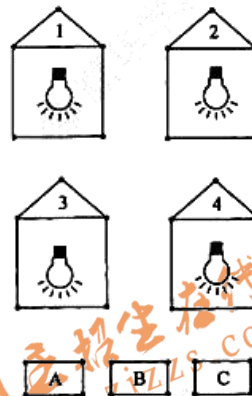


第(7)题图

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

(8) 如图, A, B, C 三个开关控制着 1, 2, 3, 4 号四盏灯. 若开关 A 控制着 2, 3, 4 号灯 (即按一下开关 A , 2, 3, 4 号灯亮, 再按一下开关 A , 2, 3, 4 号灯熄灭), 同样, 开关 B 控制着 1, 3, 4 号灯, 开关 C 控制着 1, 2, 4 号灯. 开始时, 四盏灯都亮着, 那么下列说法正确的是

- (A) 只需要按开关 A, C 可以将四盏灯全部熄灭
(B) 只需要按开关 B, C 可以将四盏灯全部熄灭
(C) 按开关 A, B, C 可以将四盏灯全部熄灭
(D) 按开关 A, B, C 无法将四盏灯全部熄灭



第(8)题图

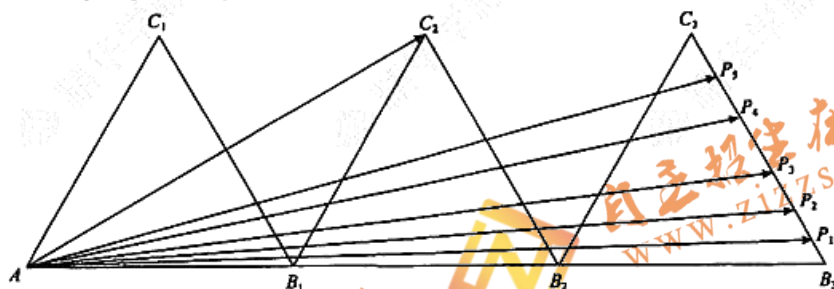
第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

- (9) 复数 $z = 1 + \frac{1}{i}$ 在复平面内对应的点的坐标是 _____.
- (10) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和. 若 $S_6 = 51$, $a_1 + a_9 = 26$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d =$ _____, 通项公式 $a_n =$ _____.
- (11) 已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{2}{x} - a$ 的一个零点在区间 $(1, 2)$ 内, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- (12) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $BC = 3$, $AB = \sqrt{6}$, 则 $\angle C =$ _____, $AC =$ _____.
- (13) 为了促销某电子产品, 商场进行降价, 设 $m > 0, n > 0, m \neq n$, 有三种降价方案:
方案①: 先降 $m\%$, 再降 $n\%$;
方案②: 先降 $\frac{m+n}{2}\%$, 再降 $\frac{m+n}{2}\%$;
方案③: 一次性降价 $(m+n)\%$.
则降价幅度最小的方案是 _____ (填出正确的序号)



- (14) 如图, $\triangle AB_1C_1$, $\triangle B_1B_2C_2$, $\triangle B_2B_3C_3$ 是三个边长为 2 的等边三角形, 且有一条边在同一直线上, 边 B_3C_3 上有 5 个不同的点 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , 设 $m_i = \overrightarrow{AC_2} \cdot \overrightarrow{AP_i} (i=1, 2, \dots, 5)$, 则 $m_1 + m_2 + \dots + m_5 =$ _____.



第(14)题图

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

- (15) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin x (\cos x - \sqrt{3} \sin x)$.

- (I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
(II) 求函数 $f(x)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上的单调递增区间.

- (16) (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n} a_n$, 设 $b_n = \frac{a_n}{n}, n \in \mathbb{N}^+$.

- (I) 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列;
(II) 求数列 $\{\log_2 b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

- (17) (本小题满分 13 分)

某校高三年级共有学生 195 人, 其中女生 105 人, 男生 90 人. 现采用按性别分层抽样的方法, 从中抽取 13 人进行问卷调查. 设其中某项问题的选择分别为“同意”、“不同意”两种, 且每人都做了一种选择. 下面表格中提供了被调查人答卷情况的部分信息.

	同意	不同意	合计
女学生	4		
男学生		2	

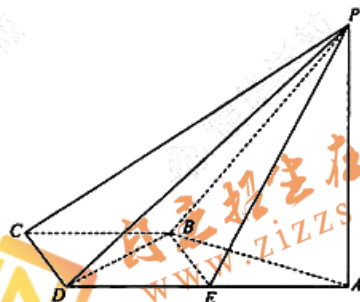
- (I) 完成上述统计表;
(II) 根据上表的数据估计高三年级学生该项问题选择“同意”的人数;
(III) 从被抽取的女生中随机选取 2 人进行访谈, 求选取的 2 名女生中至少有一人选择“同意”的概率.



(18)(本小题满分 14 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $PA \perp AB$, $CD \perp AD$,
 $BC = CD = \frac{1}{2}AD$, E 为 AD 的中点.

- (I) 求证: $PA \perp CD$;
(II) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PAB ;
(III) 在平面 PAB 内是否存在点 M , 使得直线 $CM \parallel$ 平面 PBE , 请说明理由.



(19)(本小题满分 14 分)

过点 $A(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 相交于 E, F 两点, 自点 E, F 分别向直线 $x=3$ 作垂线, 垂足分别为 E_1, F_1 .

- (I) 当直线 l 的斜率为 1 时, 求线段 EF 的中点坐标;
(II) 记 $\triangle AEE_1, \triangle AFF_1$ 的面积分别为 S_1, S_2 . 设 $\lambda = S_1 S_2$, 求 λ 的取值范围.

(20)(本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax + e$, $g(x) = 1 - \ln x$, 其中 e 为自然对数的底数.

- (I) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $l: x+2y=0$ 垂直, 求实数 a 的值;
(II) 设函数 $F(x) = -x[g(x) + \frac{1}{2}x - 2]$, 若 $F(x)$ 在区间 $(m, m+1)$ ($m \in \mathbb{Z}$) 内存在唯一的极值点, 求 m 的值;
(III) 用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的较大者, 记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ($x > 0$). 若函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有 2 个零点, 求实数 a 的取值范围.



北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试答案(文史类)

2017.3

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	B	C	B	C	A	D	D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

题号	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
答案	(1, -1)	3, 3n-2	(0, 3)	$\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$	②	90

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15)(本小题满分 13 分)

$$\begin{aligned} \text{解: (I) 因为 } f(x) &= \sin x (\cos x - \sqrt{3} \sin x) = \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 6 分

$$\text{(II) 令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ 得,}$$

$$2k\pi - \frac{5\pi}{6} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{所以 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}.$$

又因为 $x \in [0, \pi]$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上的单调递增区间是 $[0, \frac{\pi}{12}]$ 和 $[\frac{7\pi}{12}, \pi]$ 13 分

(16)(本小题满分 13 分)

$$\text{解: (I) 由 } a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n} a_n, \text{ 得 } \frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \frac{a_n}{n}.$$

$$\text{所以 } b_{n+1} = 2b_n, \text{ 即 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2.$$

高三数学学科测试答案(文史类) 第 1 页(共 5 页)



又因为 $b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$,

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 公比为 2 的等比数列. 7 分

(II) 由 (I) 可知 $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

所以 $\log_2 b_n = \log_2 2^{n-1} = n-1$.

则数列 $\{\log_2 b_n\}$ 的前 n 项和

$T_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 13 分

(17) (本小题满分 13 分)

解: (I) 统计表如下:

	同意	不同意	合计
女学生	4	3	7
男学生	4	2	6

..... 3 分

(II) 高三年级学生该项问题选择“同意”的人数估计有

$\frac{4}{7} \times 105 + \frac{4}{6} \times 90 = 60 + 60 = 120$ (人). 7 分

(III) 设“同意”的 4 名女生分别为 A_1, A_2, A_3, A_4 , “不同意”的 3 名女生分别为 $B_1,$

B_2, B_3 .

从 7 人中随机选出 2 人的情况有

$A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2A_3, A_2A_4, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2,$

$A_3B_3, A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3$, 共 21 种结果.

其中 2 人都选择“不同意”的情况有 B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3 , 共 3 种结果.

设 2 名女生中至少有一人选择“同意”为事件 M ,

所求概率 $P(M) = 1 - \frac{3}{21} = \frac{6}{7}$ 13 分

(18) (本小题满分 14 分)

证明: (I) 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

又因为 $PA \perp AB$,

所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

则 $PA \perp CD$ 5 分

高三数学学科测试答案(文史类) 第 2 页(共 5 页)



連接 CE , 所以 $BD \perp CE$,

又因为 $BC \parallel AE, BC = AE$.

所以四边形 $ABCE$ 是平行四边形.

所以 $CE \parallel AB$, 则 $BD \perp AB$.

由(I)知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $PA \perp BD$.

又因为 $PA \cap AB = A$,

则 $BD \perp$ 平面 PAB ,

且 $BD \subset \text{平面 } PBD$,

所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAB .



(Ⅲ) 在梯形 $ABCD$ 中, AB 与 CD 不平行. 延长 AB, DC , 相交于点 $M (M \in \text{平面 } PAB)$, 点 M 即为所求的一个点. 理由如下: 由已知, $BC \parallel ED$, 且 $BC = ED$.

所以四边形 $BCDE$ 是平行四边形, 所以 $CD \parallel EB$, 即 $CM \parallel EB$.

又 $EB \subset$ 平面 PBE , $CM \not\subset$ 平面 PBE ,

所以 $CM \parallel$ 平面 PBE .

(19)(本小题满分 14 分)

解: (I) 依题意, 直线 l 的方程为 $y = x - 1$, 由
$$\begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$
 得 $2x^2 - 3x = 0$.

设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$, 线段 EF 的中点为 $M(x_0, y_0)$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_0 = \frac{3}{4},$

$y_0 = x_0 - 1 = -\frac{1}{4}$, 所以 $M(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ 6分

(II) 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 由 $\begin{cases} x = my + 1, \\ x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$

得 $(m^2 + 3)y^2 + 2my - 2 = 0$, 显然 $m \in \mathbb{R}$.

高三数学学科测试答案(文史类) 第3页(共5页)



设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 3}, y_1 y_2 = \frac{-2}{m^2 + 3}$.

$E_1(3, y_1), F_1(3, y_2)$.

因为 $\lambda = S_1 S_2 = \frac{1}{2}(3 - x_1)|y_1| \cdot \frac{1}{2}(3 - x_2)|y_2|$

$$= \frac{1}{4}(2 - my_1)(2 - my_2)|y_1 y_2|$$

$$= \frac{1}{4}[4 - 2m(y_1 + y_2) + m^2 y_1 y_2]|y_1 y_2|$$

$$= \frac{2m^2 + 6 + 2m^2 - m^2}{2(m^2 + 3)} \cdot \frac{2}{m^2 + 3}$$

$$= \frac{3m^2 + 6}{(m^2 + 3)^2}$$

$$= -\frac{3}{(m^2 + 3)^2} + \frac{3}{m^2 + 3}$$

因为 $\frac{1}{m^2 + 3} \in (0, \frac{1}{3}]$,

所以实数 λ 的取值范围是 $(0, \frac{2}{3}]$ 14 分

20. (本小题满分 13 分)

解: (I) 由已知得, $f'(x) = 3x^2 - 3a$, 所以 $f'(1) = 3 - 3a$,

依题意, $(3 - 3a)(-\frac{1}{2}) = -1$, 解得 $a = \frac{1}{3}$ 3 分

(II) 因为 $F(x) = -x[g(x) + \frac{1}{2}x - 2] = -x[(1 - \ln x) + \frac{1}{2}x - 2] = x \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x$,

则 $F'(x) = \ln x + 1 - x + 1 = \ln x - x + 2$, 设 $t(x) = \ln x - x + 2$,

则 $t'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

令 $t'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

则由 $t'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$, $F'(x)$ 为增函数;

由 $t'(x) < 0$, 得 $x > 1$, $F'(x)$ 为减函数;

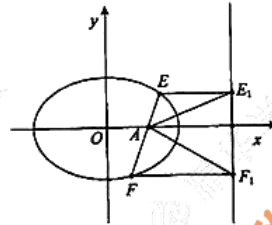
而 $F'(\frac{1}{e}) = -2 - \frac{1}{e} + 2 = -\frac{1}{e} < 0$, $F'(1) = 1 > 0$.

则 $F'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有且只有一个零点 x_1 ,

且在 $(0, x_1)$ 上 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 为减函数;

在 $(x_1, 1)$ 上 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 为增函数.

高三数学学科测试答案(文史类) 第 4 页(共 5 页)





所以 x_1 为极值点, 此时 $m=0$.

又 $F'(3) = \ln 3 - 1 > 0, F'(4) = 2\ln 2 - 2 < 0$,

则 $F'(x)$ 在 $(3, 4)$ 上有且只有一个零点 x_2 ,

且在 $(3, x_2)$ 上 $F'(x) > 0, F(x)$ 为增函数;

在 $(x_2, 4)$ 上 $F'(x) < 0, F(x)$ 为减函数.

所以 x_2 为极值点, 此时 $m=3$.

综上 $m=0$ 或 $m=3$ 9 分

(Ⅲ)(1) 当 $x \in (0, e)$ 时, $g(x) > 0$, 依题意, $h(x) \geq g(x) > 0$, 不满足条件;

(2) 当 $x=e$ 时, $g(e)=0, f(e)=e^3-3ae+e$,

①若 $f(e)=e^3-3ae+e \leq 0$, 即 $a \geq \frac{e^2+1}{3}$, 则 e 是 $h(x)$ 的一个零点;

②若 $f(e)=e^3-3ae+e > 0$, 即 $a < \frac{e^2+1}{3}$, 则 e 不是 $h(x)$ 的零点;

(3) 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, 所以此时只需考虑函数 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上零点的情况. 因为 $f'(x) = 3x^2 - 3a > 3e^2 - 3a$, 所以

①当 $a \leq e^2$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f(e) = e^3 - 3ae + e$, 所以

(i) 当 $a \leq \frac{e^2+1}{3}$ 时, $f(e) \geq 0, f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上无零点;

(ii) 当 $\frac{e^2+1}{3} < a \leq e^2$ 时, $f(e) < 0$,

又 $f(2e) = 8e^3 - 6ae + e \geq 8e^3 - 6e^3 + e > 0$,

所以此时 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上恰有一个零点;

②当 $a > e^2$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm\sqrt{a}$.

由 $f'(x) < 0$, 得 $e < x < \sqrt{a}$;

由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \sqrt{a}$;

所以 $f(x)$ 在 $(e, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(e) = e^3 - 3ae + e < e^3 - 3e^3 + e < 0$,

$f(2a) = 8a^3 - 6a^2 + e > 8a^2 - 6a^2 + e = 2a^2 + e > 0$,

所以此时 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上恰有一个零点;

综上, $a > \frac{e^2+1}{3}$ 13 分



扫描二维码, 关注自主招生官方微信!

查看更多自主招生相关资讯!

