六安一中2023届高三年级第八次月考
数学试卷

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	D	C	A	B	B	B	AC	AC	ABC	AD

二、填空题

13、-160　　14、2　　15、$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　16、$\sqrt{6}$；7π（第一空2分，第二空3分）

三、填空题

17、解：（1）若选①，由 $a\cos B-b\cos A=c-b$ 及正弦定理

得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin C-\sin B$，

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin B$，

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B$，

所以 $2\cos A\sin B=\sin B$，因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．　…………………5

若选②，由 $\tan A+\tan B+\tan C-\sqrt{3}\tan B\tan C=0$，

得 $\tan C=\frac{\tan A+\tan B}{\sqrt{3}\tan B-1}=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$，

所以 $\sqrt{3}\tan B=\tan A\cdot\tan B$，因为 $0<B<\pi$，所以 $\tan B\neq 0$，

因 $\tan A=\sqrt{3}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．　…………………5

若选③，因为 ΔABC 的面积为 $\frac{1}{2}a(b\sin B+c\sin C-a\sin A)$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a(b\sin B+c\sin C-a\sin A)=\frac{1}{2}bc\sin A$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．　…………………5

（2）由（1）知，$A=\frac{\pi}{3}$，因为 ΔABC 内切圆半径为 $\sqrt{3}$，

所以 $\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$，　…………………6

即 $(b+c+8)\cdot\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc$，$b+c+8=\dfrac{1}{2}bc$ ①， 7

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3}$，即 $b^2+c^2-2bc\cdot\dfrac{1}{2}=64$

所以 $(b+c)^2-3bc=64$ ②， 8

联立①②，得 $(\dfrac{1}{2}bc-8)^2-3bc=64$，解得 $bc=44$， 9

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 44\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=11\sqrt{3}$． 10

18、证明：（1）在梯形 $ABCD$ 中，作 $BE\perp CD$ 于点 E．

因为 $AB\,//\,CD$，$\angle BAD=90°$，$CD=2AB=2AD=2$，

所以四边形 $ADEB$ 是正方形，且 $BD=\sqrt{2}$，$DE=1$，所以 $EC=CD-DE=1$，$BC=\sqrt{BE^2+EC^2}=\sqrt{2}$，

在 $\triangle SBD$ 中，$BD=\sqrt{2}$，$SB=BC=\sqrt{2}$，$SD=CD=2$，

所以 $SD^2=SB^2+BD^2$，所以 $SB\perp BD$ 3

在四棱锥 $S-ABCD$ 中，由 $SB\perp BC$，$SB\perp BD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$BC\cap BD=B$，$\therefore$ $SB\perp$ 平面 $ABCD$． 5

（2）连接 AC 交 BD 于点 F，连接 PF，因为 $SA\,//$ 平面 PBD，平面 $SAC\cap$ 平面 $PBD=PF$，

所以 $SA\,//\,PF$，因为 $AB\,//\,CD$，所以 $\triangle ABF\sim\triangle CDF$，所以 $\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{2}$，

$\because$ $SA\,//\,PF$，$\therefore$ $\dfrac{SP}{PC}=\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{1}{2}$， 7

由 $BD=BC=\sqrt{2}$，$CD=2$，可知 $BD\perp BC$，

又由于（1）$SB\perp$ 平面 $ABCD$，故 BC、BD、BS 两两垂直，故可以点 B 为原点，

以 BC、BD、BS 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $C\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$S\left(0,0,\sqrt{2}\right)$，$D\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$， 8

由 $\dfrac{SP}{PC}=\dfrac{1}{2}$，可得 $P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},0,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{6},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$．

平面 SAB 的法向量为 $\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$． 10

设直线 AP 与平面 SAB 所成角的为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|}\right|=\dfrac{1}{5}$，所以直线 AP 与平面 SAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{5}$． 12

19、**证明：**(1)因为$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，所以当$n\geq 2$时，$S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$， ………………1

即$\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，而$a_n>0$，有$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}>0$，

所以$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1(n\geq 2)$，所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$是以$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$为首项，公差为1的等差数列；

$\sqrt{S_n}=1+(n-1)\times 1=n$，则$S_n=n^2$， ………………4

当$n\geq 2$时，$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=n+n-1=2n-1$，

又$a_1=1$满足上式，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$. ………………6

(2) 因为$\dfrac{4}{(a_n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}$，所以当$n\geq 2$时，$\dfrac{4}{(a_n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，

故$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(a_n+1)^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$，

当$n=1$时，$\dfrac{1}{a_1^2}=1<2$，所以对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(a_n+1)^2}<2$. ………………9

又$\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}\geq\dfrac{1}{a_1^2}=1$， ………………10

所以$1\leq\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(a_i+1)^2}<2$，所以$\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(a_i+1)^2}\right]=1$. ………………12

20、**解：**(1) 把男性样本记为$x_1,x_2,\cdots,x_{120}$，其平均数记为$\overline{x}$，方差记为s_x^2；

把女性样本记为$y_1,y_2,\cdots,y_{90}$，其平均数记为$\overline{y}$，方差记为s_y^2.

则$\overline{x}=14,s_x^2=6;\overline{y}=21,s_y^2=17$. 记总样本数据的平均数为$\overline{z}$，方差为$s^2$.

由$\overline{x}=14,\overline{y}=21$，根据按比例分配的分层随机抽样总样本平均数与各层样本平均数的关系，

可得总样本平均数为$\overline{z}=\dfrac{120}{120+90}\overline{x}+\dfrac{90}{120+90}\overline{y}=\dfrac{120\times 14+90\times 21}{210}=17$， ………………2

根据方差的定义，总样本方差为

$$s^2=\frac{1}{210}\left[\sum_{i=1}^{120}(x_i-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{90}(y_i-\overline{z})^2\right]=\frac{1}{210}\left[\sum_{i=1}^{120}(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{90}(y_i-\overline{x}+\overline{y}-\overline{z})^2\right],$$

由$\displaystyle\sum_{i=1}^{120}(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{120}x_i-120\overline{x}=0$可得$\displaystyle\sum_{i=1}^{120}2(x_i-\overline{x})(\overline{x}-\overline{z})=2(\overline{x}-\overline{z})\sum_{i=1}^{120}(x_i-\overline{x})=0$

同理，$\displaystyle\sum_{i=1}^{90}2(y_i-\overline{y})(\overline{y}-\overline{z})=2(\overline{y}-\overline{z})\sum_{i=1}^{90}(y_i-\overline{y})=0$，

因此，$\displaystyle s^2=\frac{1}{210}\left[\sum_{i=1}^{120}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{120}(\overline{x}-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{90}(y_i-\overline{y})^2+\sum_{i=1}^{90}(\overline{y}-\overline{z})^2\right]$

$=\dfrac{1}{210}\left\{120\left[s_x^2+(\overline{x}-\overline{z})^2\right]+90\left[s_y^2+(\overline{y}-\overline{z})^2\right]\right\}$，

所以 $s^2=\frac{1}{210}\left\{120\times\left[6+(14-17)^2\right]+90\times\left[17+(21-17)^2\right]\right\}\approx 23$，…………5

所以总样本的均值为 17，方差为 23，

并据此估计该项健身活动全体参与者的脂肪含量的总体均值为 17，方差为 23．…………6

（2）由（1）知 $\mu=17$，…………7

所以 $X\sim N(17,23)$，又因为 $\sqrt{23}\approx 4.8$，

所以 $P(12.2\le X\le 21.8)=P(17-4.8\le X\le 17+4.8)\approx 0.6827$，…………8

$P(X<12.2)\approx\frac{1}{2}\times(1-0.6827)=0.15865$，…………9

因为 $X\sim B(4,0.15865)$，

所以 $P(X=4)=C_4^4\times 0.15865^4\approx 0.0006$．…………11

所以 4 位参与者的脂肪含量均小于12.2% 的概率为 0.0006．…………12

20、**解**：（1）因为实轴长为 4，即 $2a=4$，$a=2$，又 $b=2$，故 C 的方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$．…………4

（2）因为 $\angle ANP+\angle AOM=\pi$，又 $\angle MOP+\angle AOM=\pi$，即 $\angle ANP=\angle MOP$，

故 $\tan\angle ANP=\tan\angle MOP=\frac{1}{\tan\angle OMP}$，即 $-k_{AN}=\frac{1}{-k_{OM}}$，所以 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1$，…………6

设 $G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，$M(x_M,y_M)$，由题意可知 $A(0,-2)$，

则直线 $AG:y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$，直线 $AH:y=\frac{y_2+2}{x_2}x-2$，

因为 M 在直线 l 上，所以 $y_M=t$，代入直线 AG 方程，

可知 $x_M=\frac{(t+2)x_1}{y_1+2}$，故 M 坐标为 $\left(\frac{(t+2)x_1}{y_1+2},t\right)$，所以 $k_{OM}=\frac{t(y_1+2)}{(t+2)x_1}$，…………7

又 $k_{AN}=k_{AH}=\frac{y_2+2}{x_2}$，由 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1$，则 $\frac{t(y_1+2)}{(t+2)x_1}\cdot\frac{y_2+2}{x_2}=1$，

整理可得 $\frac{t+2}{t}=\frac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}$，…………8

当直线 GH 斜率不存在时，显然不符合题意，故设直线 $GH:y=kx+t$，…………9

代入双曲线方程：$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$ 中，可得 $(k^2-1)x^2+2ktx+t^2-4=0$，所以 $\begin{cases}k^2-1\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}$．

所以 $x_1+x_2=\frac{-2kt}{k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{t^2-4}{k^2-1}$，…………10

又$(y_1+2)(y_2+2)=(kx_1+t+2)(kx_2+t+2)$

$=k^2x_1x_2+k(t+2)(x_1+x_2)+(t+2)^2=k^2\cdot\dfrac{t^2-4}{k^2-1}+k(t+2)\cdot\dfrac{-2kt}{k^2-1}+(t+2)^2=\dfrac{-(t+2)^2}{k^2-1}$,

所以$\dfrac{t+2}{t}=\dfrac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}=\dfrac{\dfrac{-(t+2)^2}{k^2-1}}{\dfrac{t^2-4}{k^2-1}}=\dfrac{-(t+2)^2}{t^2-4}=\dfrac{-(t+2)}{t-2}(t+2\neq 0)$,

故$t=2-t$,即$t=1$,所以点P坐标为$(0,1)$. 12

22、**解:**(1)当$a=1$时,$f(x)=e^x-\ln(x+2)-2$,$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$, ...1

所以$f'(x)$在$[-1,1]$上是单调递增的,且$f'(-1)=\dfrac{1}{e}-1, f'(0)=\dfrac{1}{2}$,

所以$\exists x_0\in(-1,0)$,使得$f'(x_0)=0$,

得$f(x)$在$[-1,x_0]$上是单调递减,在$[x_0,1]$上是单调递增. 3

所以$f_{\max}(x)=\max\{f(-1),f(1)\}=\max\left\{\dfrac{1}{e}-2,e-\ln 3-2\right\}=e-\ln 3-2$. 5

(2)**(方法一)**解:因为$f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x+2}$,$f''(x)=ae^x+\dfrac{1}{(x+2)^2}\quad(x>-2)$,

$\because a>0,\therefore f''(x)>0$,$\therefore f'(x)$在$(-2,+\infty)$上是单调递增,且$\lim\limits_{x\to-2}f'(x)\to-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\to+\infty$,

所以存在$x_0\in(-2,+\infty)$,使得$f'(x_0)=0\Rightarrow ae^{x_0}-\dfrac{1}{x_0+2}=0\Rightarrow ae^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$,

$\Rightarrow \ln ae^{x_0}=\ln\dfrac{1}{x_0+2}\Rightarrow \ln a=-x_0-\ln(x_0+2)$ 6

当$x\in(-2,x_0)$时,$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(-2,x_0)$上是单调递减的

当$x\in(x_0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(x_0,+\infty)$单调递增的.

当$a>0$时,

$f(x)=ae^x-\ln(x+2)+\ln a-2>a\left(\dfrac{x^2}{2}+x+1\right)-x-1+\ln a-2=\dfrac{ax^2}{2}+(a-1)x+a+\ln a-3$,

................7

当$x\to+\infty$时,$f(x)\to+\infty$,又因为$\lim\limits_{x\to-2}f(x)\to+\infty$,所以要使$f(x)$在$(-2,+\infty)$上有两个零点,

则需要 $f_{\min}(x)<0$，即 $f(x_0)=ae^{x_0}-\ln(x_0+2)+\ln a-2<0$. ………………8

$$\Rightarrow f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}-\ln(x_0+2)-\ln(x_0+2)-x_0-2=\frac{1}{x_0+2}-2\ln(x_0+2)-(x_0+2)$$

设 $t=x_0+2$，则有 $\frac{1}{t}-2\ln t-t<0$，令 $g(t)=\frac{1}{t}-t-2\ln t$，$(t>0)$.

因为 $g'(t)=-\frac{1}{t^2}-1-\frac{2}{t}=-\frac{(t+1)^2}{t^2}<0$，所以 $g(t)$ 单调递减，

$\because g(1)=1-1-2\ln 1=0 \quad \therefore t>1$，即 $x_0+2>1\Rightarrow x_0>-1$. ………………10

设 $h(x)=-x-\ln(x+2)(x>-1)$，$h'(x)=-1-\frac{1}{x+2}<0$，所以 $h(x)$ 单调递减，

所以 $\ln a<-(-1)-\ln(-1+2)=1\Rightarrow 0<a<e$，所以 a 的取值范围 $(0,e)$. ………………12

（方法二）因为 $f(x)=e^{x+\ln a}+x+\ln a-(x+2)-\ln(x+2)$

令 $g(t)=e^t+t$，则 $g'(t)=e^t+1>0$，所以 $g(t)$ 为单调递增，

$f(x)=0\Leftrightarrow g(x+\ln a)=g(\ln(x+2))$，因此 $x+\ln a=\ln(x+2)$ 有两个实数根 x_1,x_2，令

$h(x)=\ln(x+2)-x$，则 $h'(x)=-\frac{x+1}{x+2}$，可知 $h(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，由 $\lim\limits_{x\to-2}h(x)\to-\infty, h(-1)=1, \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\to-\infty$，（也可利用

$\ln x<\sqrt{x}\left(x>e^2\right), h(x)=\ln(x+2)-x<\sqrt{x+2}-x<\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$，当

$x\to+\infty$，$h(x)\to 0$），可知 $\ln a<1$，即 $a\in(0,e)$.

（方法三）由（1）知 $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x+2}$ 是增函数且有唯一零点 t，

所以 $f(x)_{\min}=f(t)=ae^t-\ln(t+2)+\ln a-2=\frac{1}{t+2}-2\ln(t+2)-t-2$ 是减函数且有唯一零点 -1，

所以 $f(t)<0\Rightarrow t>-1, a=\frac{1}{e^t(t+2)}<e$.所以 a 的取值范围为 $(0,e)$.

答案仅供参考，其他解法请酌情给分！