2021年高考模拟考试

数学试题

2021.5

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考试号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x\geqslant 2\}$，$B=\{x|\log_2(x-1)<1\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$

A. $(-\infty,2)$　B. $(-\infty,2]$　C. $(1,2)$　D. $(1,3)$

2.已知$(2-i)\cdot z=i$，i为虚数单位，则$|z|=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　B. 1　C. 2　D. $\sqrt{5}$

3."直线m垂直平面α内的无数条直线"是"$m\perp\alpha$"的

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

4.已知随机变量X服从正态分布$N(1,\sigma^2)$，若$P(X\leqslant 0)=0.2$，则$P(X<2)=$

A. 0.2　B. 0.4　C. 0.6　D. 0.8

5.已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过点$P(1,\frac{1}{2})$的直线交椭圆$C$于$A$、$B$两点，若$P$为$AB$的中点，则直线$AB$的方程为

A. $3x-2y-2=0$　B. $3x+2y-4=0$　C. $3x+4y-5=0$　D. $3x-4y-1=0$

6.在平面直角坐标系xoy中，O为坐标原点，已知点$M(\sqrt{3},-1)$和点$N(0,1)$. 若点P在$\angle MON$的角平分线上，且$|\overrightarrow{OP}|=4$，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MN}=$

A. -2　B. -6　C. 2　D. 6

7.已知函数$f(x)=\begin{cases}-1+2\ln x, & x>1\\ 1-2\ln x, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$，若$f(a)=f(b)$，则$a+b$的最小值是

A. $2\sqrt{e}$　B. e　C. $1+e$　D. $2e$

8."曼哈顿距离"是由赫尔曼·闵可夫斯基所创的词汇，是一种使用在几何度量空间的几何学用语，例如在平面直角坐标系中，点$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$的曼哈顿距离为：$L_{PQ}=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$. 若点$P(1,2)$，点$Q$为圆$C:x^2+y^2=4$上一动点，则$L_{PQ}$的最大值为

A. $1+\sqrt{2}$　B. $1+2\sqrt{2}$　C. $3+\sqrt{2}$　D. $3+2\sqrt{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9. 已知 $a>b>0$，$c\in\mathbf{R}$，下列不等式恒成立的有

A. $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$　　B. $ac^2>bc^2$　　C. $\log_2\frac{1}{a}>\log_2\frac{1}{b}$　　D. $(\frac{a+b}{2})^2<\frac{a^2+b^2}{2}$

10. 函数 $f(x)=2\cos(2x-\frac{\pi}{6})+1(x\in\mathbf{R})$，则下列说法正确的是

A. 若 $f(x_1)=f(x_2)=3$，则 $x_1-x_2=k\pi(k\in\mathbf{Z})$

B. 函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上为增函数

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},1)$ 对称

D. 函数 $f(x)$ 的图象可以由 $g(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1(x\in\mathbf{R})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f(1-x)=-f(1+x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2+x-2$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数

B. $f(2018)+f(2021)=-2$

C. 函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象有且仅有 3 个交点

D. 当 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)=x^2-9x+18$

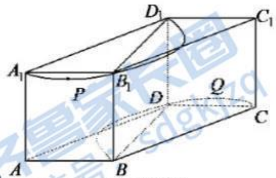
12. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$AB=AA_1=\frac{1}{2}AD=1$，$\angle BAD=60°$，点 P 是半圆弧 $\overset{\frown}{A_1D_1}$ 上的动点（不包括端点），点 Q 是半圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的动点（不包括端点），则下列说法正确的是

A. 四面体 $PBCQ$ 的体积是定值

B. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{A_1P}$ 的取值范围是 $(0,4)$

C. 若 C_1Q 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ，则 $\tan\theta>\frac{1}{2}$

D. 若三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球表面积为 S，则 $S\in[4\pi,13\pi)$



第12题图

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $(x-\frac{2}{x})^n$ 的展开式中各项的二项式系数的和为 128，则这个展开式中 x^3 项的系数是 ______▲______.

14. 已知 $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{2}$，则 $\cos2\alpha=$ ______▲______.

15. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_1 的直线 l 分别与双曲线的左、右支交于点 A、B，若以 AB 为直径的圆过点 F_2，且 $|AF_2|=|BF_2|$，则该双曲线的离心率为___▲___.

16. 设函数 $f(x)=e^x-\cos x-2a$，$g(x)=x$，若存在 $x_1,x_2\in[0,\pi]$使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立，则 x_2-x_1 的最小值为 1 时，实数 $a=$___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在①$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2A-\sin B\sin C$；②$2a\sin C=c\tan A$；③$2\cos^2\frac{B+C}{2}=\cos 2A+1$；三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

问题：已知 ΔABC 的内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，若 $b=\sqrt{2}$，______.

(1)求 A 的值；

(2)若 $\sin B=\sqrt{2}\sin C$，求 ΔABC 的面积.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$是正项等比数列，满足 a_3 是 $2a_1,3a_2$ 的等差中项，$a_4=16$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=(-1)^n\log_2 a_{2n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

甲、乙两人进行"抗击新冠疫情"知识竞赛，比赛采取五局三胜制，约定先胜三局者获胜，比赛结束. 假设在每局比赛中，甲获胜的概率为$\frac{2}{3}$，乙获胜的概率为$\frac{1}{3}$，各局比赛相互独立.

(1)求甲获胜的概率；

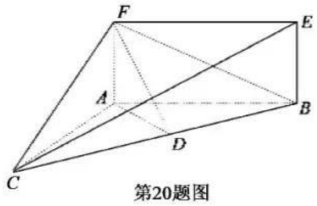
(2)设比赛结束时甲和乙共进行了 X 局比赛，求随机变量 X 的分布列及数学期望.

20.（12分）

如图，四边形 $ABEF$ 是矩形，平面 $ABC\perp$ 平面 $ABEF$，D 为 BC 中点，$\angle CAB=120^\circ$，$AB=AC=4$，$AF=\sqrt{6}$.

（1）证明：平面 $ADF\perp$ 平面 BCF；

（2）求二面角 $F-AD-E$ 的余弦值.



第20题图

21.（12分）

已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$，过点 $T(0,p)$ 作两条互相垂直的直线 l_1 和 l_2，l_1 交抛物线 C 于 A、B 两点，l_2 交抛物线 C 于 E、F 两点，当点 A 的横坐标为1时，抛物线 C 在点 A 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$.

（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）已知 O 为坐标原点，线段 AB 的中点为 M，线段 EF 的中点为 N，求 ΔOMN 面积的最小值.

22.（12分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x$，$g(x)=(1-a)x\ln x-e^{x-1}$，$a>0$.

（1）当 $a=\frac{e}{2}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在定义域内的单调性；

（2）若 $f(x)\geqslant g(x)+x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2021年高考模拟考试

数学试题参考答案及评分标准

2021.5

说明:(1)此评分标准仅供参考;

(2)学生解法若与此评分标准中的解法不同,请酌情给分.

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1—8:C A B D B A C D

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得3分.

9. AD　10. AC　11. ACD　12. BCD

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 84　14. $\frac{4}{5}$　15. $\sqrt{3}$　16. $-\frac{1}{2}$

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解:(1)若选①:因为$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2A-\sin B\sin C$,

所以由正弦定理得$(b-c)^2=a^2-bc$,整理得$b^2+c^2-a^2=bc$, ………… 2分

所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$, ………… 4分

因为$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$; ………… 6分

若选②:因为$2a\sin C=c\tan A$,所以$2\sin A\sin C=\sin C\cdot\frac{\sin A}{\cos A}$, ………… 2分

即$\cos A=\frac{1}{2}$, ………… 4分

因为$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$; ………… 6分

若选③:因为$2\cos^2\frac{B+C}{2}=\cos 2A+1$,所以$\cos(B+C)+1=2\cos^2A-1+1$, ………… 2分

即$2\cos^2A+\cos A-1=0$

解得$\cos A=\frac{1}{2}$或$\cos A=-1$, ………… 4分

因为$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6分

(2)因为$\sin B=\sqrt{2}\sin C$,由正弦定理得$b=\sqrt{2}c$,因为$b=\sqrt{2}$,所以$c=1$, ………… 8分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………… 10分

18. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为a_3是$2a_1$，$3a_2$的等差中项，

所以$2a_3=2a_1+3a_2$， ………… 2分

即$2a_1q^2=2a_1+3a_1q$，

因为$a_1\neq 0$，所以$2q^2-3q-2=0$，解得$q=2$或$q=-\frac{1}{2}$，

因为数列$\{a_n\}$是正项等比数列，所以$q=2$. ………… 4分

因为$a_4=16$，即$a_4=a_1q^3=8a_1=16$，解得$a_1=2$

所以$a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$. ………… 6分

(2)解法一：(分奇偶、并项求和)

由(1)可知，$a_{2n+1}=2^{2n+1}$

所以，$b_n=(-1)^n\cdot\log_2 a_{2n+1}=(-1)^n\cdot\log_2 2^{2n+1}=(-1)^n\cdot(2n+1)$ ………… 7分

①若n为偶数，

$T_n=-3+5-7+9-\cdots-(2n-1)+(2n+1)=(-3+5)+(-7+9)+\cdots+[-(2n-1)+(2n+1)]$

$=2\times\frac{n}{2}=n$ ………… 9分

②若n为奇数，

当$n\geqslant 3$时，$T_n=T_{n-1}+b_n=n+1-(2n+1)=-n-2$，

当$n=1$时，$T_1=-3$适合上式， ………… 11分

综上得$T_n=\begin{cases}n, n\text{为偶数}\\ -n-2, n\text{为奇数}\end{cases}$（或$T_n=(n+1)(-1)^n-1, n\in\mathbf{N}^*$） ………… 12分

解法二：(错位相减法)

由(1)可知，$a_{2n+1}=2^{2n+1}$

所以，$b_n=(-1)^n\cdot\log_2 a_{2n+1}=(-1)^n\cdot\log_2 2^{2n+1}=(-1)^n\cdot(2n+1)$ ………… 7分

$T_n=(-1)^1\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7+\cdots+(-1)^n(2n+1)$

所以$-T_n=(-1)^2\times 3+(-1)^3\times 5+(-1)^4\times 7+\cdots+(-1)^{n+1}(2n+1)$ ………… 8分

所以$2T_n=-3+2[(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n]-(-1)^{n+1}(2n+1)$

$=-3+2\times\frac{1-(-1)^{n-1}}{2}+(-1)^n(2n+1)=-3+1-(-1)^{n-1}+(-1)^n(2n+1)$

$=-2+(2n+2)(-1)^n$ ………… 11分

所以$T_n=(n+1)(-1)^n-1, n\in\mathbf{N}^*$ ………… 12分

19. 解：(1)由已知得，比赛三局且甲获胜的概率$P_1=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$， ………… 1分

比赛四局且甲获胜的概率为$P_2=C_3^2(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$， ………… 2分

比赛五局且甲获胜的概率为 $P_3=C_4^2(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$，…………………………… 3 分

所以甲获胜的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$. …………………………… 4 分

(2)随机变量 X 的取值为 3,4,5 …………………………………………………………… 5 分

则 $P(X=3)=(\frac{2}{3})^3+(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{3}$，……………………………………………………… 6 分

$P(X=4)=C_3^2(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+C_3^2(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}+\frac{2}{27}=\frac{10}{27}$，……………………… 8 分

$P(X=5)=C_4^2(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2=\frac{8}{27}$， ………………………………………………… 10 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$

所以 $E(X)=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{10}{27}+5\times\frac{8}{27}=\frac{107}{27}$. ……………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $AB=AC$，D 为 BC 中点，所以 $AD\perp BC$ ………………………………… 1 分

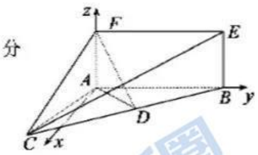
因为 $ABEF$ 是矩形，所以 $FA\perp AB$

因为平面 $ABC\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABEF=AB$

$AF\subset$ 平面 $ABEF$，所以 $AF\perp$ 平面 ABC

因为 $BC\subset$ 平面 ABC

所以 $AF\perp BC$ ………………………………………………… 3 分



又 AF，$AD\subset$ 平面 ADF，$AF\cap AD=A$

所以 $BC\perp$ 平面 ADF

又 $BC\subset$ 平面 BCF

所以平面 $ADF\perp$ 平面 BCF. ……………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知，$AF\perp$ 平面 ABC，故以点 A 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$ 的方向为 y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$. ……………………………………… 5 分

则 $A(0,0,0)$，$F(0,0,\sqrt{6})$，$B(0,4,0)$，$C(2\sqrt{3},-2,0)$，$E(0,4,\sqrt{6})$，所以 $D(\sqrt{3},1,0)$

所以 $\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AF}=(0,0,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{AE}=(0,4,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3},-6,0)$ …………… 6 分

由(1)知，$\overrightarrow{BC}$ 为平面 ADF 的一个法向量.

设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\ 4y+\sqrt{6}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，

$z=2\sqrt{2}$，所以 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},2\sqrt{2})$ ………………………………………………… 10 分

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{BC}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{2\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ………………………… 11 分

因为二面角 $F-AD-E$ 为锐角，则二面角 $F-AD-E$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………… 12 分

21. 解：(1)因为 $x^2=2py(p>0)$ 可化为 $y=\frac{x^2}{2p}$，所以，$y'=\frac{x}{p}$ ………………………… 1 分

因为当 A 点的横坐标为 1 时，抛物线 C 在 A 点处的切线斜率为$\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$，

所以，$p=2$

所以，抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$. ………………………… 3 分

(2)解法一：由(1)知点 T 坐标为(0,2)

由题意可知，直线 l_1 和 l_2 斜率都存在且均不为 0

设直线 l_1 方程为 $y=kx+2$ ………………………… 4 分

由$\begin{cases}y=kx+2\\x^2=4y\end{cases}$联立消去 y 并整理得，$x^2-4kx-8=0$

$\Delta=(-4k)^2+32=16k^2+32>0$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1\cdot x_2=-8$

所以，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4=4k^2+4$

因为 M 为 AB 中点，所以 $M(2k,2k^2+2)$ ………………………… 6 分

因为 $l_1\perp l_2$，N 为 EF 中点，所以 $N(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+2)$ ………………………… 7 分

所以，直线 MN 的方程为 $y-(2k^2+2)=\frac{2k^2+2-(\frac{2}{k^2}+2)}{2k+\frac{2}{k}}\cdot(x-2k)=(k-\frac{1}{k})\cdot(x-2k)$

整理得 $y=(k-\frac{1}{k})x+4$ ………………………… 8 分

所以，直线 MN 恒过定点(0,4) ………………………… 10 分

所以 ΔOMN 面积 $S=\frac{1}{2}\times4\times\left|2k-(-\frac{2}{k})\right|=4\left|k+\frac{1}{k}\right|\geq8$

当且仅当 $k=\frac{1}{k}$ 即 $k=\pm1$ 时，ΔOMN 面积取得最小值为 8. ………………………… 12 分

(2)解法二：由(1)知点 T 坐标为(0,2)

由题意可知，直线 l_1 和 l_2 斜率都存在且均不为 0

设直线 l_1 方程为 $y=kx+2$ ………………………… 4 分

由$\begin{cases}y=kx+2\\x^2=4y\end{cases}$联立消去 y 并整理得，$x^2-4kx-8=0$

$\Delta=(-4k)^2+32=16k^2+32>0$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1\cdot x_2=-8$

所以，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4=4k^2+4$

因为 M 为 AB 中点，所以 $M(2k,2k^2+2)$ ………………………………………… 6 分

因为 $l_1\perp l_2$，N 为 EF 中点，所以 $N(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+2)$ ………………………………… 7 分

所以，直线 MN 的方程为 $y-(2k^2+2)=\dfrac{2k^2+2-(\frac{2}{k^2}+2)}{2k+\frac{2}{k}}\cdot(x-2k)=(k-\frac{1}{k})\cdot(x-2k)$

整理得 $y=(k-\frac{1}{k})x+4$ ………………………………………………………… 8 分

所以，点 O 到直线 MN 的距离为 $d=\dfrac{4}{\sqrt{1+(k-\frac{1}{k})^2}}$ ………………………………… 9 分

又 $|MN|=\sqrt{(2k+\frac{2}{k})^2+(2k^2+2-\frac{2}{k^2}-2)^2}=2\left|k+\frac{1}{k}\right|\sqrt{1+(k-\frac{1}{k})^2}$ …………… 10 分

所以 ΔOMN 面积 $S=\frac{1}{2}\times|MN|\times d=\frac{1}{2}\times2\left|k+\frac{1}{k}\right|\sqrt{1+(k-\frac{1}{k})^2}\times\dfrac{4}{\sqrt{1+(k-\frac{1}{k})^2}}$

$=4\left|k+\frac{1}{k}\right|\geqslant8$

当且仅当 $k=\frac{1}{k}$，即 $k=\pm1$ 时，ΔOMN 面积取得最小值为 8. ………………………… 12 分

22. 解：(1) 当 $a=\frac{e}{2}$ 时，$f(x)=x\ln x-\frac{e}{2}x^2+x$

所以 $f'(x)=\ln x-ex+2$ ………………………………………………………… 1 分

令 $p(x)=\ln x-ex+2$，则 $p'(x)=\frac{1}{x}-e=\frac{1-ex}{x}$ ………………………………………… 2 分

若 $p'(x)>0$，则 $0<x<\frac{1}{e}$；若 $p'(x)<0$，则 $x>\frac{1}{e}$

所以函数 $p(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上为增函数，在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上为减函数，

则 $p(x)\leqslant p(\frac{1}{e})=0$，即 $f'(x)\leqslant0$，仅在 $x=\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)=0$ ……………………………… 3 分

所以，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为减函数. ………………………………………………… 4 分

(2) 方法一：因为 $f(x)=x\ln x-ax^2+x$，$g(x)=(1-a)x\ln x-e^{x-1}$，$a>0$

若 $f(x)\geqslant g(x)+x$ 恒成立，即对任意的 $x>0$，$e^{x-1}-ax(x-\ln x)\geqslant0$ 恒成立，

即对任意的 $x>0$，$\frac{e^{x-1}}{x}-a(x-\ln x)\geqslant0$ 恒成立. ……………………………………… 6 分

令 $h(x)=\frac{e^{x-1}}{x}-a(x-\ln x)$,

所以 $h'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}-a(1-\frac{1}{x})=\frac{x-1}{x}\cdot(\frac{e^{x-1}}{x}-a)$ ………………………………… 7 分

令 $q(x)=\frac{e^{x-1}}{x}-a,(x>0)$,则 $q'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2},(x>0)$

当 $x\in(0,1)$时,$q'(x)<0$,$q(x)$单调递减,

当 $x\in(1,+\infty)$时,$q'(x)>0$,$q(x)$单调递增,

所以,$q(x)_{\min}=q(1)=1-a$, ……………………………………………………………… 9 分

若 $1-a<0$,即 $a>1$ 时,$h(1)=1-a<0$,与 $h(x)\geqslant0$ 矛盾, ………………………………… 10 分

若 $1-a\geqslant0$,即 $a\leqslant1$ 时,$q(x)\geqslant0$

令 $h'(x)>0$ 得,$x>1$,$h(x)$为增函数,令 $h'(x)<0$ 得,$0<x<1$,$h(x)$为减函数,

则 $h(x)_{\min}=h(1)=1-a\geqslant0$,即 $h(x)\geqslant0$ 对任意 $x>0$ 恒成立

所以,若 $f(x)\geqslant g(x)+x$ 恒成立,则 $a\in(-\infty,1]$. ………………………………………… 12 分

方法二:因为 $f(x)=x\ln x-ax^2+x$,$g(x)=(1-a)x\ln x-e^{x-1}$,$a>0$

若 $f(x)\geqslant g(x)+x$ 恒成立,即对任意的 $x>0$,$e^{x-1}-ax(x-\ln x)\geqslant0$ 恒成立,

即对任意的 $x>0$,$\frac{e^{x-1}}{x}-a(x-\ln x)\geqslant0$ 恒成立, ………………………………………… 6 分

即 $e^{x-\ln x-1}\geqslant a(x-\ln x)$ ……………………………………………………………… 7 分

令 $t=t(x)=x-\ln x$,则 $t'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

所以,当 $x\in(0,1)$时,$t'(x)<0$,$t(x)$单调递减,

当 $x\in(1,+\infty)$时,$t'(x)>0$,$t(x)$单调递增,

所以,$t=t(x)\geqslant t(1)=1$ ……………………………………………………………… 8 分

若 $e^{x-\ln x-1}\geqslant a(x-\ln x)$对任意 $x>0$ 恒成立,则 $a\leqslant\frac{e^{x-\ln x-1}}{x-\ln x}=\frac{e^{t-1}}{t}$恒成立. …… 10 分

设 $q(t)=\frac{e^{t-1}}{t}$,$t\geqslant1$,则 $q'(t)=\frac{e^{t-1}(t-1)}{t^2}\geqslant0$

所以,当 $t\in[1,+\infty)$时,$q(t)$单调递增,

所以,$\frac{e^{t-1}}{t}\geqslant q(1)=1$

所以,若 $f(x)\geqslant g(x)+x$ 恒成立,则 $a\in(-\infty,1]$. ………………………………………… 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索