长沙市南雅中学高三年级2023年下学期入学检测

数 学

时量：120分钟　　分值：150分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知 z 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的一个根，则 $\left|\bar{z}\right|=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

2．集合 $U=\left\{x\middle|x\le 10且x\in\mathbf{N}^*\right\}$，$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且 $A\cap B=\{4,5\}$，$\left(\complement_U B\right)\cap A=\{1,2,3\}$，$\left(\complement_U A\right)\cap\left(\complement_U B\right)=\{6,7,8\}$，则 $B=$（　　）

A．$\{4,5,6,7\}$　　B．$\{4,5,6,9\}$　　C．$\{4,5,9,10\}$　　D．$\{4,5,6,9,10\}$

3．已知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x=2$，一个周期为4，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）

A．$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$　　B．$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$　　C．$\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$　　D．$\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

4．椭圆 $\frac{x^2}{m^2+1}+\frac{y^2}{m^2}=1$（$m>0$）的焦点为 F_1，F_2，上顶点为A，若 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则 $m=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

5．二维码与生活息息相关，我们使用的二维码主要是 21×21 大小的，即441个点，根据0和1的二进制编码，一共有 2^{441} 种不同的码，假设我们1万年用掉 3×10^{15} 个二维码，那么大约可以用（　　）（$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）

A．10^{117}万年　　B．10^{118}万年　　C．10^{119}万年　　D．10^{200}万年

6．等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}=10$，$S_{20}=30$，则 $S_{40}=$（　　）

A．60　　B．70　　C．80　　D．150

7．某学校有男生600人，女生400人．为调查该校全体学生每天的运动时间，采用分层抽样的方法获取容量为 n 的样本．经过计算，样本中男生每天运动时间的平均值为80分钟，方差为10；女生每天运动时间的平均值为60分钟，方差为20．结合数据，估计全校学生每天运动时间的方差为（　　）

A．96　　B．110　　C．112　　D．128

8．过直线 $x+y-4=0$ 上一点向圆O：$x^2+y^2=1$ 作两条切线，设两切线所成的最大角为 α，

则 $\sin\alpha =$（　　）

A. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{8}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若 a，b，$c \in \mathbf{R}$，$a > b$，则下列不等式恒成立的是（　　）

A. $a^2 > b^2$　　B. $|b-a| \le |a-c| + |b-c|$

C. $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$　　D. $a|a| > b|b|$

10. 若函数 $f(x) = x\cdot(e^x - 1)$，则（　　）

A. $f(x)$ 在（0，$+\infty$）上单调递增

B. $f(x)$ 有两个零点

C. $f(x)$ 在点（-1，$f(-1)$）处切线的斜率为 -1

D. $f(x)$ 是偶函数

11. 某通信工具在发送、接收信号时都会使用数字 0 或是 1 作为代码，且每次只发送一个数字．由于随机因素的干扰，发出的信号 0 或 1 有可能被错误地接收为 1 或 0．已知发送信号 0 时，接收成 0 或 1 的概率分别为 0.94 和 0.06；发送信号 1 时，接收成 1 或 0 的概率分别为 0.96 和 0.04．假设发送信号 0 或 1 的概率是等可能的，则（　　）

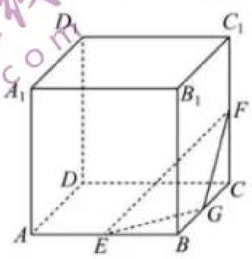
A. 已知两次发送的信号均为 1，则接收到的信号均为 1 的概率为 $(0.5)^2\cdot(0.96)^2$

B. 在单次发送信号中，接收到 0 的概率为 0.49

C. 在单次发送信号中，能正确接收的概率为 0.96

D. 在发送三次信号后，恰有两次接收到 0 的概率为 $C_3^2(0.49)^2\times 0.51$

12. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球为球 O，E、F 分别是棱 AB 和棱 CC_1 的中点，G 在棱 BC 上移动，则下列结论成立的有（　　）



A. 存在点 G，使 OD⊥EG

B. 对于任意点 G，OA∥平面 EFG

C. 直线 EF 的被球 O 截得的弦长为 $\sqrt{2}$

D．过直线 EF 的平面截球 O 所得的所有圆中，半径最小的圆的面积为$\frac{\pi}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知向量$\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(-2,4)$，若$\vec{a}/\!/\vec{c}$，$\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c})$，则$|\vec{c}|=$________.

14．若$f(x)=(x+a)\cdot\ln\frac{2x-1}{2x+1}$为偶函数，则实数 a=________.

15．设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点为 F，以线段 OF（O 为坐标原点）为直径的圆交双曲线 C 的一条渐近线于 O、A 两点，且$|OA|=2|AF|$，则双曲线 C 的离心率为________.

16．已知$(1+2023x)^{100}+(2023-x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}$，若存在$k\in\{0，1，2，\cdots，100\}$使得$a_k<0$，则 k 的最大值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分 10 分）

已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1=1$且公差$d\neq0$，a_4是a_2和a_8的等比中项.

（1）若数列$\{a_n\}$的前 m 项和 S_m=66，求 m 的值；

（2）若a_1，a_2，a_{k_1}，a_{k_2}，$\cdots$，a_{k_n}成等比数列，求数列$\{k_n\}$的通项公式.

18.（本小题满分 12 分）

记△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $(2b-c)\cos A = a\cos C$.

（1）求角 A 的大小；

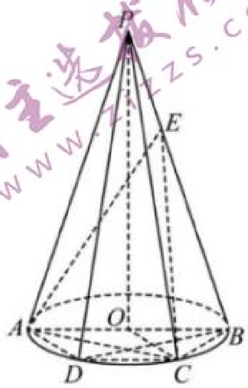
（2）设 BC 边上的高 AD=1，求△ABC 面积的最小值.

19.（本小题满分 12 分）

如图，圆锥 P0 的高为 3，AB 是底面圆 O 的直径，PC，PD 为圆锥的母线，四边形 ABCD 是底面圆 O 的内接等腰梯形，且 AB=2CD=2，点 E 在母线 PB 上，且 BE=2EP.

（1）证明：平面 AEC⊥平面 POD；

（2）求平面 AEC 与平面 EAB 的夹角的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知动圆 O_1 过定点 D（2，0），且在 y 轴上截得弦长为 4.

（1）求动圆圆心 O_1 的轨迹 C 的方程；

（2）过点 T（0，1）的直线 l 与轨迹 C 交于 A，B 两点，若点 P（1，2）满足直线 PA 与直线 PB 的倾斜角互补，求 $|TA|\cdot|TB|$ 的值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x$（$a\neq 0$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 既有极大值又有极小值，且极大值和极小值的和为 $g(a)$．解不等式 $g(a)<2a-2$.

22．（本小题满分 12 分）

航天事业是国家综合国力的重要标志，带动着一批新兴产业和新兴学科的发展．某市为了激发学生对航天科技的兴趣，点燃学生的航天梦，现组织该市全体学生参加航天创新知识竞赛，并随机抽取 1000 名学生作为样本，研究其竞赛成绩．经统计分析该市高中生竞赛成绩 X 近似地服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2，并已求得 $\bar{x}=73$ 和 $s^2=37.5$．

（1）若该市有 4 万名高中生，试估计这些高中生中竞赛成绩位于区间（66.9，85.2）的人数；

（2）若规定成绩在 85.2 以上的学生等级为优秀，现从全市高中生中任意抽取一个进行访谈，如果取到学生等级不是优秀，则继续抽取下一个，直至取到等级为优秀的学生为止，但抽取的总次数不超过 n．如果抽取次数的期望值不超过 6，求 n 的最大值．

（附：$\sqrt{37.5}\approx 6.1$，$0.975^5\approx 0.881$，$0.975^6\approx 0.859$，$0.975^7\approx 0.838$，$0.975^8\approx 0.817$，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.68$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.95$）

长沙市南雅中学 2024 届高三入学考试数学试题【教师版】

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知 z 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的一个根，则 $|\overline{z}|=$（　　）

A. 1　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. 2

【答案】B【详解】因为方程 $x^2-2x+2=0$ 是实系数方程，且 $\Delta=(-2)^2-4\times2=-4<0$，

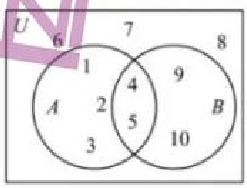
所以该方程有两个互为共轭复数的两个虚数根，

即 $z_{1,2}=\dfrac{2\pm2\mathrm{i}}{2}=1\pm\mathrm{i}$，即 $z=1\pm\mathrm{i}\Rightarrow\overline{z}=1\mp\mathrm{i}\Rightarrow|\overline{z}|=\sqrt{1^2+(\mp1)^2}=\sqrt{2}$，故选：B

2.集合 $U=\{x|x\leq10$ 且 $x\in\mathbf{N}^*\}$，$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且 $A\cap B=\{4,5\}$，$(\complement_U B)\cap A=\{1,2,3\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{6,7,8\}$，则 $B=$（　　）

A. $\{4,5,6,7\}$　　　　B. $\{4,5,6,9\}$　　　　C. $\{4,5,9,10\}$　　　　D. $\{4,5,6,9,10\}$

【答案】C【详解】作出 Venn 图如图所示，



则 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,9,10\}$. 故选：C.

3.已知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x=2$，一个周期为 4，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）

A. $\sin(\frac{\pi}{2}x)$　　　　B. $\cos(\frac{\pi}{2}x)$　　　　C. $\sin(\frac{\pi}{4}x)$　　　　D. $\cos(\frac{\pi}{4}x)$

【答案】B

4.椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2+1}+\dfrac{y^2}{m^2}=1$（$m>0$）的焦点为 F_1，F_2，上顶点为 A，若 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则 $m=$（　　）

A. 1　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. 2

答案 C：解：由题可得 $c=\sqrt{m^2+1-m^2}=1$，$b=m$，又因为 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，可得 $\angle F_1AO=\frac{\pi}{6}$，

可得 $\tan\angle F_1AO=\dfrac{1}{m}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $m=\sqrt{3}$. 故选：C.

5.二维码与生活息息相关，我们使用的二维码主要是 21×21 大小的，即 441 个点，根据 0 和 1 的二进制编码，一共有 2^{441} 种不同的码，假设我们 1 万年用掉 3×10^{15} 个二维码，那么大约可以用（　　）（$\lg2\approx0.301$，$\lg3\approx0.477$）

A. 10^{117} 万年　　　　B. 10^{118} 万年　　　　C. 10^{119} 万年　　　　D. 10^{200} 万年

【答案】A【详解】∵ 1 万年用掉 3×10^{15} 个二维码，∴大约能用 $\frac{2^{441}}{3\times10^{15}}$ 万年，设 $x=\frac{2^{441}}{3\times10^{15}}$，

则 $\lg x=\lg\frac{2^{441}}{3\times10^{15}}=\lg2^{441}-(\lg3+\lg10^{15})=441\lg2-\lg3-15$

$\approx 441\times0.301-0.477-15\approx117$，即$x\approx10^{117}$万年．故选：A

6.等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_{10}=10$，$S_{20}=30$，则$S_{40}=$（　）

A．60　　B．70　　C．80　　D．150

【答案】D【详解】因为$\{a_n\}$是等比数列，所以$S_{10},S_{20}-S_{10},S_{30}-S_{20},S_{40}-S_{30}$成等比数列，

又因为$S_{10}=10$，$S_{20}=30$，$S_{20}-S_{10}=20$，则$S_{30}-S_{20}=40$，$S_{40}-S_{30}=80$，

所以$S_{30}=70$，$S_{40}=150$.

7.某学校有男生 600 人，女生 400 人．为调查该校全体学生每天的运动时间，采用分层抽样的方法获取容量为n的样本．经过计算，样本中男生每天运动时间的平均值为 80 分钟，方差为 10；女生每天运动时间的平均值为 60 分钟，方差为 20．结合数据，估计全校学生每天运动时间的方差为（　）

A．96　B．110　C．112　D．128

【答案】B【详解】由题意，按分层抽样方式抽取样本，且该校女、男学生比例为$\frac{400}{600}=\frac{2}{3}$，

不妨设抽取女、男学生分别为$2n$，$3n$，则总数为$5n$，

则所有样本平均值为$\frac{1}{5n}\times(80\times3n+60\times2n)=72$，

所以方差为$\frac{3n}{5n}\times[10+(80-72)^2]+\frac{2n}{5n}\times[[20+(60-72)^2]=110$．故选：B．

8.过直线$x+y-4=0$上一点向圆 O：$x^2+y^2=1$ 作两条切线，设两切线所成的最大角为α，则$\sin\alpha=$（　）

A．$\frac{4\sqrt{2}}{9}$　B．$\frac{2\sqrt{2}}{9}$　C．$\frac{\sqrt{7}}{4}$　D．$\frac{\sqrt{7}}{8}$

【答案】C【详解】由圆$O:x^2+y^2=1$，可得圆心为$(0,0)$，半径为$r=1$，

设P是直线$x+y-4=0$的动点，自P向圆作切线，当OP长最短时，两切线所成的角α最大，

即OP是圆心O到直线的距离时，两切线所成的角α最大，

由点到直线的距离公式可得$d=\frac{|0+0-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\because0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$，

$\therefore\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$．故选：C．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.若 a，b，$c\in R$，$a>b$，则下列不等式恒成立的是（　）

A．$a^2>b^2$　　B．$|b-a|\le|a-c|+|b-c|$

C．$\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$　　D．$a|a|>b|b|$

【答案】BCD【详解】当 a=1，b=−2 时，满足 $a>b$，但 $a^2<b^2$，排除 A；
对于 B，∵ $|a-c|+|b-c|\ge|(a-c)-(b-c)|=|a-b|$，
当且仅当 $(a-c)(b-c)\le 0$ 时，等号成立，故 B 恒成立；
因 $\frac{1}{c^2+1}>0$，$a>b$，由不等式性质得 $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$，C 正确；
因为 $f(x)=x|x|$ 单调递增，所以 $a|a|>b|b|$ 恒成立，D 正确，故选：BCD

10.若函数 $f(x)=x\cdot(e^x-1)$，则（　　）

A. $f(x)$在（0，+∞）上单调递增　　B. $f(x)$有两个零点

C. $f(x)$在点$(-1，f(-1))$处切线的斜率为-1

D. $f(x)$是偶函数

【答案】AC;【解析】对于D：既不是奇函数也不是偶函数，故 D 错误；

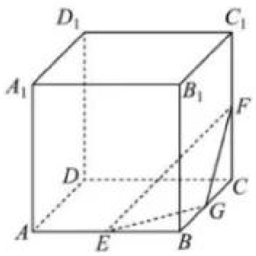
对于 B：令 $f(x)=0$，解得：$x=0$，故 B 错；

对于 C：$f'(x)=(x+1)e^x-1$，斜率 $k=f'(-1)=-1$，故 C 正确；

对于 A：$x>0$时，$(x+1)e^x>1$，故 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在（0，+∞）递增，故 A 正确；

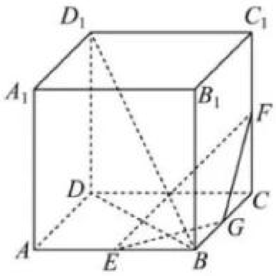
11.某通信工具在发送、接收信号时都会使用数字 0 或是 1 作为代码，且每次只发送一个数字．由于随机因素的干扰，发出的信号 0 或 1 有可能被错误地接收为 1 或 0．已知发送信号 0 时，接收成 0 或 1 的概率分别为 0.94 和 0.06；发送信号 1 时，接收成 1 或 0 的概率分别为 0.96 和 0.04．假设发送信号 0 或 1 的概率是等可能的，则（　）
A．已知两次发送的信号均为 1，则接收到的信号均为 1 的概率为$(0.5)^2\cdot(0.96)^2$
B．在单次发送信号中，接收到 0 的概率为 0.49
C．在单次发送信号中，能正确接收的概率为 0.96
D．在发送三次信号后，恰有两次接收到 0 的概率为$C_3^2(0.49)^2\times 0.51$
【答案】BD【详解】对于选项 A：两次发送的信号均为 1，接收到的信号均为 1 的概率为$(0.96)^2$，故 A 错误；对于选项 B：在单次发送信号中，接收到 0 的概率为$0.5\times0.94+0.5\times0.04=0.49$，故 B 正确；对于选项 C：在单次发送信号中，能正确接收的概率为 $0.5\times0.94+0.5\times0.96=0.95$，故 C 错误；对于选项 D：由选项 B 可知：在单次发送信号中，接收到 0 的概率为 0.49，则发送三次信号后，恰有两次接收到 0 的概率$C_3^2(0.49)^2\times(1-0.49)=C_3^2(0.49)^2\times0.51$，故 D 正确；故选：BD.

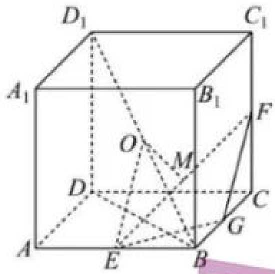
12.如图，棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的内切球为球O，E、F分别是棱AB和棱CC_1的中点，G在棱BC上移动，则下列结论成立的有（　）



A．存在点G，使$OD\perp EG$
B．对于任意点G，$OA//$平面EFG
C．直线EF的被球O截得的弦长为$\sqrt{2}$
D．过直线EF的平面截球O所得的所有圆中，半径最小的圆的面积为$\frac{\pi}{2}$

【答案】ACD;【解】当G为BC中点时，$EG\perp BD$，$EG\perp BB_1$　$BD\cap BB_1=B$，∴ $EG\perp$平面BDB_1，





平面$EFG//$平面ACD_1，$B_1D\subset$平面BDB_1，$\therefore EG\perp B_1D$，同理$GF\perp B_1D$，$EG\cap GF=G$，
所以$B_1D\perp$平面EFG，即$OD\perp$平面EFG，故 A 正确；
当G与B重合时，A在平面EFB上，O在平面EFB外，故 B 不正确；
如图，点M是线段EF的中点，由对称性可知$OM\perp EF$，由勾股定理可知易知$EF=\sqrt{EB^2+BF^2}=\sqrt{6}$，$OE=\sqrt{2}$ 球心O到EF距离为$OM=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则EF被球截得的弦长为$l=2\sqrt{R^2-OM^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，故 C 正确；

当OM垂直于过EF的平面，此时截面圆的面积最小，此时圆的半径就是$r=\frac{l}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

面积为$S=\pi r^2=\frac{1}{2}\pi$，故 D 正确.故选：ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知向量$\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(-2,4)$，若$\vec{a}//\vec{c}$，$\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c})$，则$|\vec{c}|=$______.

【答案】$3\sqrt{2}$;【详解】设$\vec{c}=(x,y)$，由$\vec{a}\parallel\vec{c}$，$\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c})$，得$x=-y$，$y-x+6=0$，

解得$x=3$，$y=-3$，所以$|\vec{c}|=3\sqrt{2}$.

14.若$f(x)=(x+a)\cdot ln\frac{2x-1}{2x+1}$为偶函数，则实数 $a=$___

【答案】0;【解答】$f(-1)=f(1)$解得 $1-a=1+a$，得 $a=0$.

15.设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，以线段$OF$（$O$为坐标原点）为直径的圆交双曲线$C$的一条渐近线于$O$、$A$两点，且$|OA|=2|AF|$，则双曲线$C$的离心率为______.

【答案】$\frac{\sqrt{5}}{2}$; 解.以线段OF（O为坐标原点）为直径的圆交双曲线C的一条渐近线于O、A两点，

故$OA\perp AF$.又根据渐近线的斜率可得$\tan\angle AOF=\frac{b}{a}=\frac{AF}{OA}=\frac{1}{2}$，故离心率$\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

16.已知$(1+2023x)^{100}+(2023-x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}$，

若存在 $k\in\{0,1,2,\cdots,100\}$使得$a_k<0$，则 k 的最大值为 ____.

【答案】49.【解答】解：二项式（$1+2023x$）^{100}的通项为

$T_{r+1}=C_{100}^r(2023x)^r=C_{100}^r\cdot 2023^r\cdot x^r$，$r\in\{0,1,2,\cdots,100\}$，

二项式（$2023-x$）^{100}的通项为

$T_{r+1}=C_{100}^{r}2023^{100-r}(-x)^{r}=C_{100}^{r}\cdot 2023^{100-r}\cdot(-1)^{r}\cdot x^{r}$，$r\in\{0,1,2,\cdots,100\}$，

$\therefore a_k=C_{100}^{k}\cdot 2023^{k}+C_{100}^{k}\cdot 2023^{100-k}\cdot(-1)^{k}=C_{100}^{k}[2023^{k}+2023^{100-k}\cdot(-1)^{k}]$，

$k\in\{0,1,2,\cdots,100\}$，若 $a_k<0$，则 k 为奇数，

此时 $a_k=C_{100}^{k}(2023^{k}-2023^{100-k})$，$\therefore 2023^{k}-2023^{100-k}<0$，

$\therefore k<100-k$，$\therefore k<50$，又$\because k$ 为奇数，$\therefore k$ 的最大值为 49．故答案为：49．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1=1$ 且公差$d\neq 0$，a_4是a_2和a_8的等比中项.

（1）若数列$\{a_n\}$的前m项和$S_m=66$，求m的值；

（2）若a_1，a_2，a_{k_1}，a_{k_2}，…，a_{k_n}成等比数列，求数列$\{k_n\}$的通项公式.

【详解】解：（1）因为$\{a_n\}$是等差数列，

所以$a_2=a_1+d$，$a_4=a_1+3d$，$a_8=a_1+7d$，……1 分

因为a_4是a_2和a_8的等比中项，所以$a_4^2=a_2\cdot a_8$，……2 分

所以$(a_1+3d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+7d)$，

由$d\neq 0$化简得$d=a_1=1$……4 分

所以$S_m=\frac{m(m+1)}{2}=66$，解得：$m=11$．……6 分

（2）又（1）问知$a_n=n$，……7 分

因为a_1，a_2，a_{k_1}，a_{k_2}，…，a_{k_n}成等比数列，

所以该数列的公比$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2$，……8 分

所以$a_{k_n}=1\times 2^{(n+2)-1}=2^{n+1}$；……9 分

又因为$\{a_n\}$为等差数列，所以$a_{k_n}=2^{n+1}=k_n$，所以$k_n=2^{n+1}$……10 分

18.（本小题满分 12 分）

记△ABC的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且$(2b-c)\cos A=a\cos C$.

（1）求角A的大小；

（2）设BC边上的高$AD=1$，求△ABC面积的最小值.

【详解】（1）由正弦定理可知：$(2\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$……2 分

所以 $2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin B$ ……4 分

又$B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B>0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$．……5 分

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$．……6 分

（2）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}a$，所以$a=\frac{\sqrt{3}}{2}bc$ ① ……7 分

而$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60°$……8 分

$=b^2+c^2-bc\geq 2bc-bc$ ……9 分

所以$a^2\geq bc$，当且仅当$b=c$时等号成立② ……10 分

由①②两式可知，$bc\geq\frac{4}{3}$，……11 分

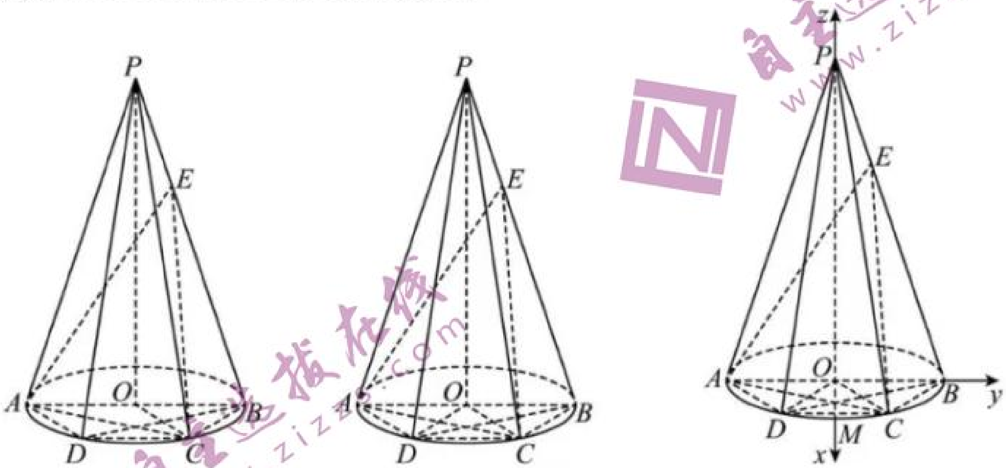
所以$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$，即△$ABC$面积的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$．……12 分

19.（本小题满分 12 分）

如图，圆锥PO的高为 3，AB是底面圆O的直径，PC，PD 为圆锥的母线，四边形$ABCD$是底面圆O的内接等腰梯形，且$AB=2CD=2$，点E在母线PB上，且$BE=2EP$.

(1)证明：平面$AEC\perp$平面POD；

(2)求平面AEC与平面EAB的夹角的余弦值.



【详解】(1) 由已知可得$CD//AO$，且$AO=CD=1$，所以四边形 OADC 为平行四边形，

又因为$OA=OC=1$，所以平行四边形 OADC 为菱形，所以$OD\perp AC$……………………1 分

在圆锥 PO 中，因为$PO\perp$平面 ABCD，$AC\subset$平面 ABCD，所以$PO\perp AC$…………………3 分

因为$PO\cap OD=O$，$PO\subset$平面 POD，$OD\subset$平面 POD，所以$AC\perp$平面 POD. ………5 分

又因为$AC\subset$平面 AEC，所以平面$AEC\perp$平面 POD. ………………………………………6 分

（2）取 CD 中点 M，易知$OM\perp$平面 PAB，$OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

以 O 为原点，OM，OB，OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则$A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$P(0,0,3)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，……………………………7 分

因为$BE=2EP$，所以$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}(0,-1,3)=\left(0,-\frac{2}{3},2\right)$，所以$E\left(0,\frac{1}{3},2\right)$，

所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{4}{3},2\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，……………………………………………8 分

设平面 AEC 的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，因为$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，

所以$\begin{cases}\frac{4}{3}y+2z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\end{cases}$，取$\vec{n}=(-3\sqrt{3},3,-2)$，……………………………………9 分

易知平面 EAB 即平面 yOz，所以平面 EAB 的一个法向量为$\vec{m}=(1,0,0)$，…………10 分

设平面 AEC 与平面 EAB 的夹角为θ，

则$\cos\theta=|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{27+9+4}\times1}=\frac{3\sqrt{30}}{20}$，

所以平面 AEC 与平面 EAB 的夹角的余弦值为$\frac{3\sqrt{30}}{20}$. ………………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

已知动圆O_1过定点$D(2,0)$，且在y轴上截得弦长为 4.

（1）求动圆圆心O_1的轨迹C的方程；

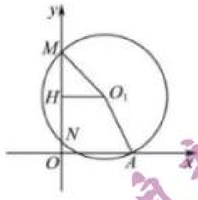
（2）过点$T(0,1)$的直线 l 与轨迹 C 交于 A，B 两点，若点$P(1,2)$满足直线PA与直线PB的倾斜角互补，求$|TA|\cdot|TB|$的值.

【详解】解：（1）如图，设动圆圆心$O_1(x,y)$，由题可知$|O_1D|=|O_1M|$，

当O_1不在y轴上时，过O_1作$O_1H\perp MN$交MN于H，则H是MN的中点.

所以$\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，化简得$y^2=4x(x\neq0)$……………………………4 分

当O_1在y轴上时，动圆O_1过定点$D(2,0)$，且在y轴上截得弦MN的长为 4，所以O_1与原点O重合，即点$(0,0)$也满足方程$y^2=4x$，综上，动圆圆心O_1的轨迹C的方程为$y^2=4x$…………5 分



（2）设直线 AB 的方程为$y=kx+1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由直线PA与PB的倾斜角互补得$k_{PA}+k_{PB}=0$，……………………………………6 分

即$\frac{y_1-2}{x_1-1}+\frac{y_2-2}{x_2-1}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}+\frac{y_2-2}{\frac{y_2^2}{4}-1}=\frac{4(y_1+y_2+4)}{(y_1+2)(y_2+2)}=0$，$\therefore y_1+y_2=-4$……………………8 分

联立$\begin{cases}y=kx+1\\ y^2=4x\end{cases}$得$ky^2-4y+4=0$．$\therefore y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=\frac{4}{k}$，………………………9 分

$\therefore\frac{4}{k}=-4$，即$k=-1$，$\therefore y_1y_2=-4$……………………………………………10 分

$\therefore|TA|\cdot|TB|=\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+(y_2-1)^2}=\sqrt{x_1^2+(kx_1)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+(kx_2)^2}$

$=(1+k^2)x_1x_2=(1+k^2)\ (\frac{y_1y_2}{4})^2=2$．……………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x(a\neq0)$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若$f(x)$既有极大值又有极小值，且极大值和极小值的和为$g(a)$．解不等式$g(a)<2a-2$.

【详解】(1) 定义域$(0,+\infty)$，$f'(x)=a+\frac{1}{x^2}-\frac{a+1}{x}=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x^2}=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$……………1 分

1° 当$a<0$时$ax-1<0$，令$f'(x)>0$，解得$0<x<1$；令$f'(x)>0$，解得$x>1$；

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；…………………………………2 分

2° 当$a>0$时：

①当$\frac{1}{a}>1$时，即$0<a<1$时，

令$f'(x)>0$，解得$0<x<1$或$x>\frac{1}{a}$；令$f'(x)<0$，解得$1<x<\frac{1}{a}$；

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上单调递减，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增；……………………3分

②当$\frac{1}{a}=1$时，即$a=1$时，$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；……4分

③当$\frac{1}{a}<1$时，即$a>1$时，令$f'(x)>0$，解得$0<x<\frac{1}{a}$或$x>1$；令$f'(x)<0$，解得$\frac{1}{a}<x<1$；

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，$\left(\frac{1}{a},1\right)$上单调递减，$(1,+\infty)$上单调递增.……………………5分

综上所述：当$a<0$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

当$0<a<1$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上单调递减，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增；

当$a=1$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a>1$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，$\left(\frac{1}{a},1\right)$上单调递减，$(1,+\infty)$上单调递增.…………6分

（2）由（1）知$f(x)$既有极大值又有极小值时：$a>0$且$a\neq 1$，……………………………7分

且$g(a)=f\left(\frac{1}{a}\right)+f(1)=1-a+(a+1)\ln a+a-1=(a+1)\ln a$……………………………8分

即：解不等式$(a+1)\ln a<2a-2$；（$a>0$且$a\neq 1$）

等价于解不等式：$\ln a-\frac{2(a-1)}{a+1}<0$，令$m(a)=\ln a-\frac{2(a-1)}{a+1}(a>0)$，……………………9分

$m'(a)=\frac{1}{a}-\frac{4}{(a+1)^2}=\frac{(a-1)^2}{a(a+1)^2}>0$，所以$m(a)$在$(0,+\infty)$单调递增，……………………10分

且$m(1)=0$，所以$m(a)<0=m(1)$，……………………………………………………11分

即不等式的解集为$\{a|0<a<1\}$.……………………………………………………12分

22.（本小题满分12分）

航天事业是国家综合国力的重要标志，带动着一批新兴产业和新兴学科的发展．某市为了激发学生对航天科技的兴趣，点燃学生的航天梦，现组织该市全体学生参加航天创新知识竞赛，并随机抽取1000名学生作为样本，研究其竞赛成绩．经统计分析该市高中生竞赛成绩X近似地服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ近似为样本平均数$\bar{x}$，σ^2近似为样本方差s^2，并已求得$\bar{x}=73$和$s^2=37.5$.

(1)若该市有4万名高中生，试估计这些高中生中竞赛成绩位于区间(66.9，85.2)的人数；

(2)若规定成绩在85.2以上的学生等级为优秀，现从全市高中生中任意抽取一个进行访谈，如果取到学生等级不是优秀，则继续抽取下一个，直至取到等级为优秀的学生为止，但抽取的总次数不超过n．如果抽取次数的期望值不超过6，求n的最大值.

（附：$\sqrt{37.5}\approx 6.1$，$0.975^5\approx 0.881$，$0.975^6=0.859$，$0.975^7=0.838$，$0.975^8=0.817$，若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.68$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.95$）

【详解】(1）由题意，全市高中生航天创新知识竞赛成绩X近似服从正态分布$N(73,37.5)$，则$\mu=73$，$\sigma=\sqrt{37.5}\approx 6.1$，即$\mu-\sigma=66.9$，$\mu+2\sigma=85.2$.……………………1分

且$P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)+\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.815$，

即$P(66.9<X<85.2)=0.815$，……………………………………………………2分

设该市4万名高中生中航天创新知识竞赛成绩位于区间(66.9,85.2)的人数为Y，

则$Y\sim B(40000,0.815)$，……………………………………………………3分

可得$E(Y)=40000\times 0.815=32600$，……………………………………………………4分

故该市 4 万名高中生中航天创新知识竞赛成绩位于区间$(66.9,85.2)$的人数约为 32600（人）.

……………………………………………………5 分

（2）由$P(X>85.2)=\frac{1-0.95}{2}=0.025$,可知任意抽取一人，等级为优秀的概率$p=0.025$，

……………………………………………………6 分

设抽取次数为ξ，则ξ的分布列如下：

ξ	1	2	3	$\cdots$	n−1	n
P	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$\cdots$	$(1-p)^{n-2}p$	$(1-p)^{n-1}$

……………………………………………………7 分

故$E(\xi)=p+(1-p)p\times2+(1-p)^2p\times3+\cdots+(1-p)^{n-2}p\times(n-1)+(1-p)^{n-1}\times n$，

……………………………………………………8 分

又$(1-p)\cdot E(\xi)=(1-p)p+(1-p)^2p\times2+(1-p)^3p\times3+\cdots+(1-p)^{n-1}p\times(n-1)+(1-p)^n\times n$，

两式相减得：$pE(\xi)=p+(1-p)p+(1-p)^2p+\cdots+(1-p)^{n-2}p+(1-p)^{n-1}p$，

……………………………………………………9 分

所以$E(\xi)=1+(1-p)+(1-p)^2+\cdots+(1-p)^{n-2}+(1-p)^{n-1}=\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}=\frac{1-0.975^n}{0.025}$，

……………………………………………………10 分

而$E(\xi)=\frac{1-0.975^n}{0.025}$在$n\in N^*$时递增，

结合$0.975^5\approx0.881$，$0.975^6=0.859$，$0.975^7=0.838$，$0.975^8=0.817$，

可知：当$n=5$时，$E(\xi)=4.76$；当$n=6$时，$E(\xi)=5.64$；当$n=7$时，$E(\xi)=6.48$；

如果抽取次数的期望值不超过 6，所以n的最大值为 6. ……………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。