

南充市高 2023 届高三适应性考试（三诊）

理科数学

第 1 卷（选择题）

一、选择题：本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 在复平面内，若复数 z 对应的点为 $(2, -1)$ ，则 $z \cdot (2+i) = (\quad)$

A. -5 B. $4i$ C. $-4i$ D. 5
2. 已知集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{x+2}\}$ ，则 $C_U A = (\quad)$

A. $(-\infty, -2)$ B. $[-2, -1]$ C. $[-2, -1]$ D. $[-2, +\infty)$
3. “ $a < 2$ ”是“ $\frac{a-1}{a-1} > 0$ ”的 (\quad) 条件

A. 充分不必要 B. 必要不充分

C. 充分必要 D. 既不充分也不必要
4. 已知倾斜角为 α 的直线 l 与直线 $x+2y-\lambda=0$ 垂直，则 $\tan(-\pi+\alpha) = (\quad)$

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. -2
5. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ ，则 $B = (\quad)$

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
6. 若数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $a_{n+2} + a_n > 2a_{n+1}$ 恒成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为“W 数列”，下列数列是“W 数列”的是 (\quad)

A. $a_n = n+1$ B. $a_n = -2^n$ C. $a_n = n \times 3^n$ D. $a_n = n^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
7. 已知点 $(\phi, 0)$ 是函数 $f(x) = 2\sin(3x+\phi)$ ($0 < \phi < \frac{\pi}{2}$) 的一个对称中心，则为了得到函数 $y = 2\sin 3x + 1$ 的图象，可以将 $f(x)$ 图象 (\quad)

A. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，再向上移动 1 个单位

B. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再向上移动 1 个单位

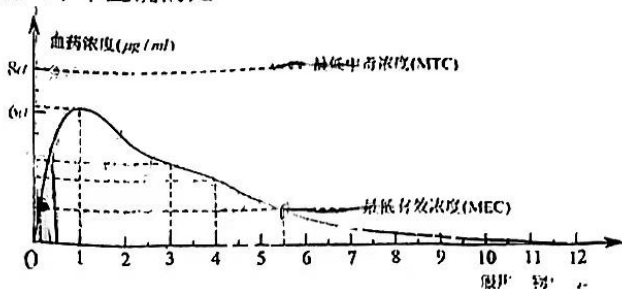
C. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，再向下移动 1 个单位

D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再向下移动 1 个单位

8. 已知奇函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, $g(x) = xf(x)$, 若 $a = g(\log_3 \frac{1}{27})$, $b = g(e^{\frac{1}{2}})$, $c = g(-3^3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$

9. 血药浓度是指药物吸收后在血浆内的总浓度, 当血药浓度介于最低有效浓度和最低中毒浓度之间时药物发挥作用. 某种药物服用 1 单位后, 体内血药浓度变化情况如图所示: (服用药物时间对应 0 时), 则下列说法中不正确的是 ()



- A. 首次服药 1 单位后 30 分钟时, 药物已经在发挥疗效
 B. 若每次服药 1 单位, 首次服药 1 小时药物浓度达到峰值
 C. 若首次服药 1 单位, 3 小时后再次服药 1 单位, 一定不会发生药物中毒
 D. 每间隔 5.5 小时服用该药物 1 单位, 可使药物持续发挥治疗作用

10. 我们知道: 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象是双曲线, 它关于直线 $y = \pm x$ 对称, 以 x 轴,

y 轴为渐近线. 实际上, 将 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象绕原点 O 顺时针或逆时针旋转一个适当的角 θ , 就可以得到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. 则关于曲线 $y = \frac{4}{x}$,

下列说法正确的是 ()

- A. 曲线上的任意点 P 到两点 $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 的距离之差为 $4\sqrt{2}$
 B. 该曲线可由 $x^2 - y^2 = 8$ 绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到
 C. 在曲线上任意一点 P 处的切线与 x 轴, y 轴围成的三角形的面积为 8
 D. 该曲线的实轴长和虚轴长均为 4

11. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3BC$, P 为斜边 AB 上一动点, 沿 CP 将三角形 ACP 折起形成直二面角 $A'-CP-B$, 记 $\angle ACP = \theta$, 当 $A'B$ 最短时, $\sin \theta = ()$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$, $\exists x_1, x_2 \in [1, 2]$ 使

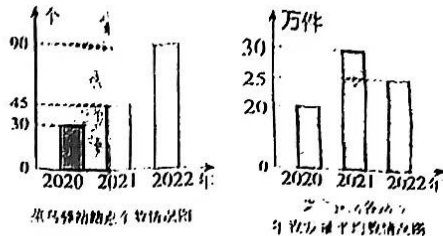
$|g(x_1) - g(x_2)| > k|f(x_1) - f(x_2)|$ (k 为常数) 成立, 则常数 k 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, e-2]$ B. $(-\infty, e-2)$
 C. $(-\infty, \frac{e^2-3}{4}]$ D. $(-\infty, \frac{e^2-3}{4})$

填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。把答案填在答题卡上。

的展开式中常数项为_____ (用数字作答)

学习小组对本地区2020年至2022年菜鸟驿站个数情况的条形图和菜鸟驿站收发数量的平均数情况条形图(如图)，根据图中提供的信息可以得出这三年中本地区菜鸟驿站每年平均收发快递_____万件



15. 设抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F ，若圆 $M: (x-3)^2 + y^2 = 8$ 与抛物线有4个不同的交点，记 x 轴上方的两个交点为 A, B ，则 $|FA| \cdot |FB|$ 的值是_____

16. 已知函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ，有以下说法：

① $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$ ；

② $f(x)$ 是周期函数；

③ $f(x)$ 在 $[\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}]$ 上单调递增，在 $[\frac{2}{\pi}, +\infty)$ 单调递减；

④ 对任意的 $m \in [-1, 1]$ ，方程 $f(x) = m$ 在区间 $(0, 1)$ 上有无穷多个解。

其中所有正确的序号为_____

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17—21题必考题，每个试题考生必须作答。第22、23题为选考题，考试根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 3$ ， $2S_n = 3a_n - 3$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_n = a_n + \log_3 a_n$ ，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 。

18. 近年来，国际环境和局势日趋严峻，高精尖科技围堵和竞争更加激烈，国家号召各类高科技企业汇聚科研力量，加强科技创新，大力增加研发资金，以突破我国在各个领域的“卡脖子”关键技术。某市为了解本市高科技企业的研发投入和产出方面的情况，抽查了本市8家半导体企业2018年至2022年的研发投入额 x (单位：百亿元) 和因此投入而产生的收入附加额 y (单位：百亿元)，对研发投入额 x_i 和收入附加额 y_i 进行整理，得到相关数据，并发现投资额 x 和收入附加额 y 成线性相关。

投资额 x_i (百亿元)	2	3	4	5	6	8	9	11
收入附加额 y_i (百亿元)	3.6	4.1	4.8	5.4	6.2	7.5	7.9	9.1

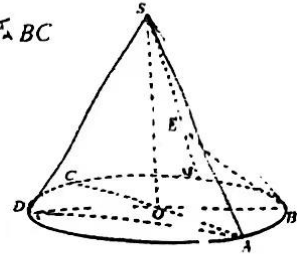
(1) 求收入的附加额 y 与研发投入额 x 的线性回归方程 (保留三位小数)；

(2) 现从这8家企业中，任意抽取3家企业，用 X 表示这3家企业中收入附加额大于投资额的企业个数，求 X 的分布列及数学期望。

参考数据： $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 334.1$ ， $\sum_{i=1}^8 y_i = 48.6$ ， $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 356$ 。

附：在线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{x^2 - n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 。

19. 如图所示，已知 AC, BD 是圆锥 SO 底面的两条直径， M 为劣弧 BC 的中点， $AO = SO = 6$ ， $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$ 。



- (1) 证明： $SM \perp AD$ ；
 (2) 若 E 为线段 SM 上的一点，且 $BE \parallel$ 平面 SAD ，求 AE 与平面 SAD 所成角的正弦值。

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 到 $M(-\sqrt{3}, 0), N(\sqrt{3}, 0)$ 的距离之和为 4。

- (1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程；
 (2) 已知点 $A(-2, 0), B(0, -1)$ ，若点 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$ 是曲线 C 上异于顶点的两个不同的点，且 $AD \parallel BE$ ，记 $\triangle DOE$ 的面积为 S ，问 S 是否定值，若是，求出该定值；若不是，说明理由。

21. 已知函数 $f(x) = x \sin x + \cos x + \frac{1}{2}ax^2$ ， $g(x) = x \ln \frac{x}{\pi}$ 。

- (1) 当 $a = 0$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的极值；
 (2) 用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最大值，记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ($x > 0$)，讨论函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数。

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. 在极坐标系 Ox 中，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = -\frac{2\sqrt{2}}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}$ ，以极点 O 为原点，极轴 Ox 所在直线为 x 轴，取同样的单位长度建立平面直角坐标系 xOy ，已知曲线 C_2 的普通方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 。

在直线为 x 轴，取同样的单位长度建立平面直角坐标系 xOy ，已知曲线 C_2 的普通方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 。

- (1) 写出曲线 C_1 的直角坐标方程和曲线 C_2 的极坐标方程；
 (2) 设点 $M(2, 2)$ ，且曲线 C_1 与曲线 C_2 交于点 A, B 两点，求 $MA \cdot MB$ 的值。

23. 设函数 $f(x) = |x-1| + |x-3|$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 仅有两个不同的正实数根 a, b 。

- (1) 求 m 的取值范围；
 (2) 求 $\sqrt{a} + \sqrt{5b}$ 的最大值。