2023届·普通高中名校联考信息卷(模拟三)

(高考研究卷)

数　学

考生注意:

1. 本试卷共150分,考试时间120分钟.
2. 请将答案填在答题卡上.

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{4x-x^2}\}$,$B=\{x|1-x>0\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|x\leqslant 4\}$　　C. $\{x|1<x\leqslant 4\}$　　D. $\{x|x\geqslant 0\}$

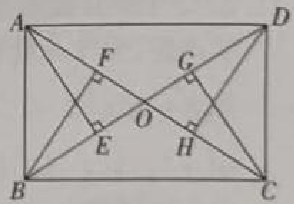
2. 已知复数 z_1,z_2 是方程 $x^2+x+1=0$ 的两个根,则 $\frac{z_2}{z_1+1}+\frac{z_1}{z_2+1}=$

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 0

3. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $2S_3=3a_2+8a_1$,$S_8=2S_7+2$,则 $a_2=$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

4. 2000多年前,古希腊雅典学派的第三大算学家欧道克萨斯首先提出黄金分割.所谓黄金分割点,指的是把一条线段分割为两部分,使其中一部分与全长之比等于另一部分与这部分之比,黄金分割比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.如图,在矩形 $ABCD$ 中,AC 与 BD 相交于点 O,$BF\perp AC$,$DH\perp AC$,$AE\perp BD$,$CG\perp BD$,且点 E 为线段 BO 的黄金分割点,则 $\overrightarrow{BF}=$



A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\overrightarrow{BG}$　　B. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\overrightarrow{BG}$

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\overrightarrow{BG}$　　D. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{BG}$

5. 已知:夹在两个平行平面间的两个几何体,被平行于这两个平行平面的任何平面所截,如果截得两个截面的面积之比为 k(常数),那么这两个几何体的体积之比也为 k.则椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 绕长轴旋转一周形成的几何体的体积为

A. $\frac{4}{3}\pi a^2b$　　B. $\frac{4}{3}\pi ab^2$　　C. $\frac{4}{3}\pi a^3$　　D. $\frac{4}{3}\pi b^3$

6. 2021 年春节联欢晚会以"共圆小康梦、欢乐过大年"为主题，突出时代性、人民性、创新性，节目内容丰富多彩，呈现形式新颖多样. 某小区的 5 个家庭买了 8 张连号的门票，其中甲家庭需要 3 张连号的门票，乙家庭需要 2 张连号的门票，剩余的 3 张随机分到剩余的 3 个家庭即可，则这 8 张门票分配到家庭的不同方法种数为

A. 48　　B. 72　　C. 120　　D. 240

7. 若 $a=\ln 1.01$，$b=\frac{2}{201}$，$c=\sqrt{1.02}-1$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(-x), x<0,\\ xe^{1-x}, x\geq 0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x)-af(x)+a^2-a=0$ 有四个不等实根，则实数 a 的取值范围为

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$

C. $(0,1]$　　D. $(-1,0)\cup\{1\}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=1$，则

A. $ab\leq\frac{1}{8}$　　B. $2a+b<\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 9$　　D. $\log_a b>0$

10. 甲袋中装有 4 个白球、2 个红球和 2 个黑球，乙袋中装有 3 个白球、3 个红球和 2 个黑球. 先从甲袋中随机取出一球放入乙袋，再从乙袋中随机取出一球. 用 A_1，A_2，A_3 分别表示甲袋取出的球是白球、红球和黑球，用 B 表示乙袋取出的球是白球，则

A. A_1，A_2，A_3 两两互斥　　B. $P(B|A_2)=\frac{1}{3}$

C. A_3 与 B 是相互独立事件　　D. $P(B)=\frac{1}{3}$

11. 2022 年 9 月钱塘江多处发现罕见潮景"鱼鳞潮". "鱼鳞潮"的形成需要两股涌潮，一股是波状涌潮，另外一股是破碎的涌潮，两者相遇交叉就会形成像鱼鳞一样的涌潮. 若波状涌潮的图象近似函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\omega\in\mathbf{N}^*, |\varphi|<\frac{\pi}{3})$ 的图象，而破碎的涌潮的图象近似 $f'(x)$（$f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数）的图象. 已知当 $x=2\pi$ 时，两潮有一个交叉点，且破碎的涌潮的波谷为 -4，则

A. $\omega=2$　　B. $f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

C. $f'(x-\frac{\pi}{4})$是偶函数　　D. $f'(x)$在区间$(-\frac{\pi}{3},0)$上单调

12. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，O 为坐标原点，则下列结论正确的是

A. 若直线 OA，OB 的斜率之积为 -2，则直线 l 过定点

B. 若直线 OA，OB 的斜率之积为 -2，则$\triangle OAB$ 面积的最大值是 $4\sqrt{2}$

C. 若$\angle AFB=120°$，则$\frac{|AF|+|BF|}{|AB|}$的最大值是$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. 若$\angle AFB=120°$，则当$\frac{|AF|+|BF|}{|AB|}$取得最大值时，$|AF|=4$

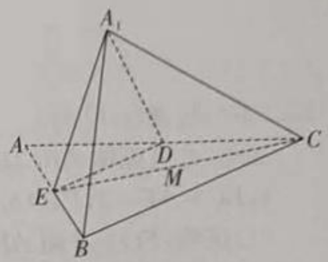
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，多空题，第一空 3 分，第二空 2 分，共 20 分.

13. 已知 $(x^2-\frac{2}{x})^n$ 的展开式的二项式系数之和为 64，则展开式第三项的系数是____________.

14. 若 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{12})=\frac{1}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})=$____________.

15. 若对任意的 $0<x_1<x_2\leqslant a$，都有 $(\frac{x_2}{x_1})^{x_1x_2}-\frac{e^{ex_2}}{e^{ex_1}}<0$ 成立，则 a 的最大值为____________.

16. 如图，DE 是边长为 6 的正三角形 ABC 的一条中位线，将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折至 $\triangle A_1DE$，当三棱锥 A_1-CED 的体积最大时，四棱锥 A_1-$BCDE$ 外接球 O 的表面积为____________；过 EC 的中点 M 作球 O 的截面，则所得截面圆面积的最小值是____________.



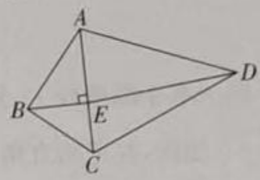
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$BC=\sqrt{3}$，$BE\perp AC$ 于点 E，$BE=\sqrt{2}$，且 $\triangle ACD$ 的面积为 $\triangle ABC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $AD\cdot\sin\angle DAC$ 的值；

(2) 当 $CD=3$ 时，求线段 DE 的长.



18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，其前 8 项的和为 64. 数列 $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列，$b_1=3$，$b_3-b_2=18$.

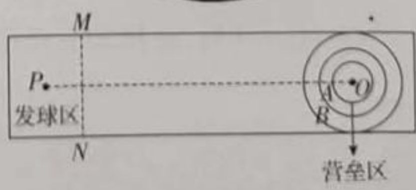
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

(3) 记 $d_n=\frac{a_{n+2}-1}{a_na_{n+1}b_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 $T_n<\frac{1}{2}$.

19. (本小题满分 12 分)

冰壶是 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在中国举行的第 24 届冬季奥运会的比赛项目之一. 冰壶比赛的场地如图所示，其中左端(投掷线 MN 的左侧)有一个发球区，运动员在发球区边沿的投掷线 MN 将冰壶掷出，使冰壶沿冰道滑行，冰道的右端有一圆形的营垒，以场上冰壶最终静止时距离营垒区圆心 O 的远近决定胜负. 甲、乙两人进行投掷冰壶比赛，规定冰壶的重心落在圆 O 中，得 3 分；冰壶的重心落在圆环



A 中，得 2 分；冰壶的重心落在圆环 B 中，得 1 分；其余情况均得 0 分. 已知甲、乙投掷冰壶的结果互不影响，甲、乙得 3 分的概率分别为$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$；甲、乙得 2 分的概率分别为$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$；甲、乙得 1 分的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$.

(1)求甲、乙两人所得分数相同的概率；

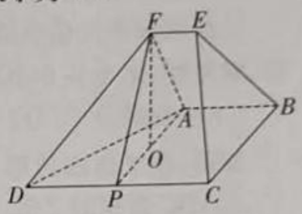
(2)设甲、乙两人所得的分数之和为 X，求 X 的分布列和期望.

20.(本小题满分 12 分)

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，$AB\parallel CD\parallel EF$，$\angle ABC=\angle BAF=90°$，$CD=2AB=4EF=4$，$BC=AF=2$，$P$，$O$ 分别为 CD，AP 的中点，二面角 F-AB-D 的大小为 $60°$.

(1)证明：$FO\perp$平面 $ABCD$；

(2)求平面 ADF 与平面 BCE 所成二面角的正弦值.

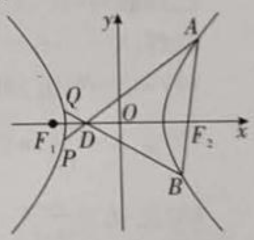


21.(本小题满分 12 分)

如图，在平面直角坐标系中，F_1，F_2 分别为等轴双曲线 Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，若点 A 为双曲线右支上一点，且$|AF_1|-|AF_2|=4\sqrt{2}$，直线 AF_2 交双曲线于 B 点，点 D 为线段 F_1O 的中点，延长 AD，BD，分别与双曲线 Γ 交于 P，Q 点.

(1)若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，求证：$x_1y_2-x_2y_1=4(y_2-y_1)$；

(2)若直线 AB，PQ 的斜率都存在，且依次设为 k_1，k_2，试判断$\frac{k_2}{k_1}$是否为定值，如果是，请求出$\frac{k_2}{k_1}$的值；如果不是，请说明理由.



22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x(a>0)$.

(1)若 $a=1$，讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)若函数 $f(x)$存在两个极小值点 x_1，x_2，求实数 a 的取值范围；

(3)当 $a>1$ 时，设 $F(x)=f(x)-(2\ln x-x+\frac{1}{x})$，求证：$F(x)\geqslant\frac{\ln(ax)}{x}-\ln x+e-1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。