中学生标准学术能力诊断性测试
理科数学 科目参考答案

二、填空题（5 分）

13、2； 14、$\left[7,\dfrac{25}{3}\right]$； 15、$6\pi$； 16、4；

三、解答题

17、【解析】(1)$\because 2R\left(\sin^2 A-\sin^2 C\right)=\left(\sqrt{3}a-b\right)\sin B$

$\therefore$两边同乘以$2R$，得$\left(2R\sin A\right)^2-\left(2R\sin C\right)^2=\left(\sqrt{3}a-b\right)2R\sin B$…………+1 分

则由正弦定理，得$a^2-c^2=\left(\sqrt{3}a-b\right)b$，即$a^2+b^2-c^2=\sqrt{3}ab$…………+3 分

$\therefore$由余弦定理，得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}ab}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$…………+5 分

$\because 0<C<\pi \quad \therefore C=\dfrac{\pi}{6}$…………+6 分

(2)$\because \left(\dfrac{\sqrt{S}}{2R}\right)^2=\sin^2 A-\left(\sin B-\sin C\right)^2$

$\therefore S=4R^2\sin^2 A-\left(2R\sin B-2R\sin C\right)^2$…………+7 分

则由正弦定理及三角形面积公式，得$\dfrac{1}{2}ab\sin\dfrac{\pi}{6}=a^2-\left(b-c\right)^2$…………+9 分

$\because a=4 \quad \therefore b=16-\left(b-c\right)^2$① 由(1)知$b^2-c^2=4\sqrt{3}b-16$②

联立①②解，得$\begin{cases} b=\dfrac{15+8\sqrt{3}}{4} \\ c=\dfrac{17}{4} \end{cases}$…………+11 分

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ab\sin\dfrac{\pi}{6}=b=\dfrac{15+8\sqrt{3}}{4}$…………+12 分

18、【解析】

(1)$\because PE /\!/ BC$，$PE\not\subset$平面ABC，$BC\subset$平面ABC $\therefore PE /\!/$平面ABC…………+1 分

$\because A\in$平面ABC，$A\in$平面PEA $\therefore$平面$ABC\cap$平面$PEA=l$且$A\in l$

$\because PE\subset$平面PEA $\therefore PE /\!/ l$…………+3 分

$\because MN /\!/$平面ABC $\therefore$同理，$MN /\!/ l$

$\therefore MN /\!/ PE$…………+5 分

$\because M$是AE中点 $\therefore$由平面几何知识得，N是PA中点 ……+6 分

(2)$\because$平面$PCBE\perp$平面ABC，平面$PCBE\cap$平面$ABC=BC$，$PC\perp BC$

$\therefore PC\perp$ 平面 ABC，则 $PC\perp AC$
$\because$ 在梯形 $PCBE$ 中，$PE\,//\,BC$　$\therefore PC$ 与 BE 相交
$\because AC\perp BE$　　$\therefore AC\perp$ 平面 $PCBE$
$\because BC\subset$ 平面 $PCBE$　$\therefore AC\perp BC$

$\therefore CA,CB,CP$ 两两垂直……+8 分

则以 C 为原点，CA,CB,CP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，设 $BC=3a$，则

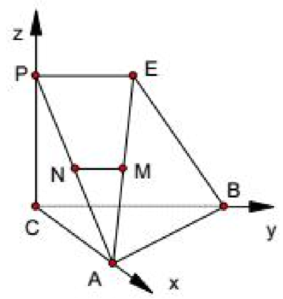
$E(0,a,3a)$，$A(3a,0,0)$，$B(0,3a,0),C(0,0,0),P(0,0,3a)$

$\therefore \vec{EA}=(3a,-a,-3a),\vec{EB}=(0,2a,-3a)$

由上知，$\vec{CP}=(0,0,3a)$ 是平面 ABC 的法向量

设 $\vec{u}=(x,y,z)$ 是平面 EAB 的法向量

设 $\vec{u}=(x,y,z)$ 是平面 EAB 的法向量



由 $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{EA}=0\\ \vec{u}\cdot\vec{EB}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}3ax-ay-3az=0\\ 2ax-3az=0\end{cases}$，不妨取

$\vec{u}=(3,3,2)$……+10 分

$\therefore \cos\left\langle\vec{u},\vec{CP}\right\rangle=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{CP}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{CP}\right|}=\dfrac{6a}{3a\sqrt{22}}=\dfrac{\sqrt{22}}{11}$

由图知，二面角 $E-AB-C$ 为锐二面角

$\therefore$ 二面角 $E-AB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$……+12 分

19、【解析】(1)$\because \bar{x}=8,\bar{y}=4.2,\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=279.4,\sum_{i=1}^{7}x_i^2=708$

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7}x_i^2-7\bar{x}^2}=\frac{279.4-7\times8\times4.2}{708-7\times8^2}=0.17，\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4.2-0.17\times8=2.84$$

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=0.17x+2.84$…………+4 分

(2)$\because 0.75<0.88$ 且 R^2 越大反映残差平方和越小，拟合效果越好

$\therefore$ 选用非线性回归模型 $\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{x}$ 更好…………+6 分

(3)由(2)知，

①当$x=20$时，销售量的预报值$\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{20}\approx 6.07$万台…………+8 分

利润的预报值$\hat{z}=200\left(1.63+0.99\sqrt{20}\right)-20\approx 1193.04$万元…………+9 分

②$\hat{z}=200\left(1.63+0.99\sqrt{x}\right)-x=-x+198\sqrt{x}+326$

$\because \hat{z}=-x+198\sqrt{x}+326=-\left(\sqrt{x}\right)^2+198\sqrt{x}+326=-\left(\sqrt{x}-99\right)^2+10127$……+10 分

$\therefore$当$\sqrt{x}=99$，即$x=9801$时，利润的预报值最大…………+11 分

答：广告费为 9801 万元时，利润的预报值最大。…………+12 分

20、【解析】依题意，P是圆$B\left(-\sqrt{2},0\right)$,$|PB|=4$

$\because$线段AP的垂直平分线与BP交于点Q　$\therefore |QP|=|QA|$

则 $|QB|+|QA|=|QB|+|QP|=|BP|=4>2\sqrt{2}=|BA|$

$\therefore$点Q的轨迹是以B、A为焦点，长轴长为4的椭圆……+3 分

$\because a=2,c=\sqrt{2}$　$\therefore b^2=a^2-c^2=2$

$\therefore$点Q的轨迹C的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$……+4 分

(2)设直线l的方程为：$x=my+\sqrt{2}$，即$x-my-\sqrt{2}=0$

$\because DE\perp l$且DE过点A

$\therefore DE$的方程为：$y=-m\left(x-\sqrt{2}\right)$即$mx+y-\sqrt{2}m=0$

则点B到直线DE的距离$d=\dfrac{\left|-\sqrt{2}m-\sqrt{2}m\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{2}|m|}{\sqrt{m^2+1}}$

$\therefore |DE|=2\sqrt{16-\dfrac{8m^2}{m^2+1}}=4\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{m^2+2}{m^2+1}}$……+6 分

由$\begin{cases} x-my-\sqrt{2}=0 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消x得，$\left(m^2+2\right)y^2+2\sqrt{2}my-2=0$

$\because$直线l曲线C有两个不同的交点 $\therefore \Delta=\left(2\sqrt{2}m\right)^2-4\left(m^2+2\right)\left(-2\right)=16\left(m^2+1\right)>0$

$\therefore |MN|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{\sqrt{16\left(m^2+1\right)}}{m^2+2}=4\dfrac{m^2+1}{m^2+2}$……+8 分

$S=\frac{1}{2}|MN||DE|=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\sqrt{\frac{m^2+2}{m^2+1}}4\frac{m^2+1}{m^2+2}=8\sqrt{2}\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2+2}}=8\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{m^2+2}}$

$\because m^2\geqslant 0\ \therefore m^2+2\geqslant 2\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant -\frac{1}{m^2+2}<0\Rightarrow \frac{1}{2}\leqslant 1-\frac{1}{m^2+2}<1$，则$8\leqslant S<8\sqrt{2}$

………… …+10 分

综上，四边形 $MDNE$ 面积 S 的取值范围$\left[8,8\sqrt{2}\right)$。………… …+12 分

21、【解析】(1)显然 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$

$\because f'(x)=-\frac{2ax^2-x+1}{x}$　$\therefore$当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{x-1}{x}$

$\therefore x>1$时 $f'(x)>0$；$0<x<1$时 $f'(x)<0$

则 $f(x)$ 在$(0,1)$上为减函数；在$(1,+\infty)$上为增函数………… …+2 分

当 $a>0$ 时，若$\Delta=1-8a\leqslant 0\Rightarrow a\geqslant\frac{1}{8}$，则$2ax^2-x+1\geqslant 0$恒成立

$\therefore$对 $\forall x>0$ 都有 $f'(x)<0$　$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数………… …+3 分

若$\Delta=1-8a>0\Rightarrow a<\frac{1}{8}$，设$x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}$

则令$u(x)=2ax^2-x+1$，对称轴$x=\frac{1}{4a}>2$，又$u(0)=1>0$且抛物线开口向上

$\therefore$由$u(x)>0$，得 $0<x<x_1$或$x>x_2$，此时 $f'(x)<0$；

由$u(x)<0$，得$x_1<x<x_2$，此时 $f'(x)>0$

$\therefore f(x)$在(x_1,x_2)上为增函数；在$(0,x_1)$、$(x_2,+\infty)$上为减函数………… …+5 分

当 $a<0$ 时，$\Delta=1-8a>0$，不妨取$x_3=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$

由$u(x)>0$，得 $0<x<x_3$，此时 $f'(x)<0$；由$u(x)<0$，得$x>x_3$，此时 $f'(x)>0$

$\therefore f(x)$在$(0,x_3)$上为减函数；在$(x_3,+\infty)$上为增函数………… …+6 分

综上，当 $a=0$ 时 $f(x)$ 在$(0,1)$上为减函数；在$(1,+\infty)$上为增函数；

当$a\geqslant\frac{1}{8}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数；

当 $0<a<\dfrac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上为增函数；在 $(0,x_1)$、$(x_2,+\infty)$ 上为减函数；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,x_3)$ 上为减函数；在 $(x_3,+\infty)$ 上为增函数。………… …+7 分

(2)∵ $f(x)$ 在定义域上有两个极值点 x_1,x_2

∴由(1)知 $0<a<\dfrac{1}{8}$ 且 x_1,x_2 是方程 $2ax^2-x+1=0$ 的两个不等实根

则 $x_1+x_2=\dfrac{1}{2a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2a}$………… …+8 分

$$f(x_1)+f(x_2)=\ln\frac{1}{x_1}-ax_1^{\ 2}+x_1+\ln\frac{1}{x_2}-ax_2^{\ 2}+x_2$$

$$\therefore=\ln\frac{1}{x_1x_2}-a\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+(x_1+x_2)$$ ………… …+9 分

$$=\ln(2a)-a\left(\frac{1}{4a^2}-2\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2a}=\ln(2a)+\frac{1}{4a}+1$$

设 $v(a)=\ln(2a)+\dfrac{1}{4a}+1$，则 $v'(a)=\dfrac{4a-1}{4a^2}$

∵ $0<a<\dfrac{1}{8}$ ∴ $4a-1<0\Rightarrow v'(a)<0$ 则 $v(a)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$ 上为减函数

$$\therefore v(a)>v\left(\frac{1}{8}\right)=\ln\frac{1}{4}+2+1=3-2\ln 2$$

即 $f(x_1)+f(x_2)>3-2\ln 2$ 成立………… …+12 分

22、【解析】(1)∵ $\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta=3$ ∴ $x^2+3y^2=3$ 即 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$

∴曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

由 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}t\\ y=3+t\end{cases}$（$t$ 为参数）消 t，得 直线 l 的普通方程为 $x+\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$……+5 分

(2)∵点 P 为曲线 C 上任意一点 ∴可设 $P\left(\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta\right)$

设点 P 到 l 的距离为 d，则依题意 $|PA|=\sqrt{2}d$

又 $d=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3\sqrt{3}\right|}{2}=\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{6}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{3}\right|$

$\because \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]\therefore \sqrt{6}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{3}\in\left[-\sqrt{6}-3\sqrt{3},\sqrt{6}-3\sqrt{3}\right]$

则 $d\in\left[\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2},\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\right]\Rightarrow|PA|\in\left[\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}\right]$

$\therefore |PA|$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}$，最小值为 $\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2}$ ………… …+10 分

23、【解析】(1) $\because f(x)=|2x-1|+|x+2|=\begin{cases}3-x(x\le-2)\\-1-3x\left(-2<x<\frac{1}{2}\right)\\x-3\left(x\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $-\frac{5}{2}$

$\because$ 存在 $x_0\in R$，使得 $f(x_0)+2a^2\leqslant 4a$ $\therefore$ 只需 $-\frac{5}{2}+2a^2\leqslant 4a\Rightarrow 4a^2-8a-5\leqslant 0$

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围 $\left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$； ……+5 分

(2)由(1)知，$a_0=\frac{5}{2}\therefore\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}=\frac{5}{2}$

由柯西不等式，得（$a^2+4b^2+9c^2$）（$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}$）$\geqslant 196$

$\therefore a^2+4b^2+9c^2\geqslant\frac{392}{5}$ 当且仅当 $|a|=|b|=|c|=\frac{2\sqrt{35}}{5}$ 时“=”成立

$\therefore$ 当 $|a|=|b|=|c|=\frac{2\sqrt{35}}{5}$ 时，$a^2+4b^2+9c^2$ 有最小值 $\frac{392}{5}$。………… …+10 分