绝密★启用前

“天一大联考·三晋名校联盟”
2022—2023学年(下)高三顶尖计划联考

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}|(x+2)(x-7)\leqslant 0\}$，$B=\{x|\log_3 x>1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{5,6\}$　　B. $\{4,5,6\}$　　C. $\{3,4,5,6\}$　　D. $\{4,5,6,7\}$

2. 已知 $z-2\bar{z}=1+6\mathrm{i}$，则 z 的虚部为

A. -6　　B. $-6\mathrm{i}$　　C. 2　　D. $2\mathrm{i}$

3. 已知圆 $C_1:x^2+(y-2)^2=5$ 和 $C_2:(x+2)^2+y^2=5$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{23}$　　D. $2\sqrt{23}$

4. 已知 $\tan\alpha=-7$，则 $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=$

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

5. 如图是一款多功能粉碎机的实物图，它的进物仓可看作正四棱台，已知该四棱台的上底面边长为40 cm，下底面边长为10 cm，侧棱长为30 cm，则该款粉碎机进物仓的容积为

A. $8\,600\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$　　B. $8\,600\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

C. $10\,500\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$　　D. $10\,500\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+a_4=2$，$a_3+a_4+a_5+a_6=4$，则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=$

A. 32　　B. 64　　C. 96　　D. 128

7. 若直线 $y=x+a$ 与函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 和 $g(x)=\ln x+b$ 的图象都相切，则 $a+b=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 3

8. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过 F 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线与 C 交于 A,B 两点，D 为 AB 的中点，且 $DM\perp l$ 于点 M，AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N，四边形 $DMFN$ 的面积为 $32\sqrt{3}$，则 $p=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $4\sqrt{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在 $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中，下列结论正确的是

A. 第 6 项和第 7 项的二项式系数相等　　B. 奇数项的二项式系数和为 256

C. 常数项为 84　　D. 有理项有 2 项

10. 已知正实数 a,b 满足 $a+4b=2$，则

A. $ab\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $2^a+16^b\geqslant4$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{9}{2}$　　D. $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\geqslant4$

11. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，且曲线 $y=f(x)$ 关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，则

A. $f(x)$ 以 2π 为周期

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称

C. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后对应的函数为偶函数

D. 函数 $y=f(x)+\frac{9}{10}$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点

12. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=2AB=2AA_1=4$，E 是棱 B_1C_1 的中点，过点 B,E,D_1 的平面 α 交棱 AD 于点 F，点 P 为线段 D_1F 上一动点，则

A. 三棱锥 $P-ABE$ 的体积为定值

B. 存在点 P，使得 $DP\perp\alpha$

C. 直线 PE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值的最大值为 $\sqrt{2}$

D. 三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球表面积的取值范围是 $[12\pi,44\pi]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的右焦点为 F，点 $A(0,m)$，若直线 AF 与 C 只有一个交点，则 $m=$__________.

14. 已知向量 a,b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，b 与 $a-\frac{3}{2}b$ 垂直，$|b|=2$，则 $|a|=$ ________.

15. 某产品的质量检验过程依次为进货检验（IQC）、生产过程检验（IPQC）、出货检验（OQC）三个环节. 已知某产品 IQC 的单独通过率为 $\frac{4}{5}$，IPQC 的单独通过率为 $\frac{3}{4}$，规定上一类检验不通过则不进入下一类检验，未通过可修复后再检验一次（修复后无需从头检验，通过率不变且每类检验最多两次），且各类检验间相互独立，则一件该产品能进入 OQC 环节的概率为________.

16. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)+g(x-2)=3$，$f(x-1)-g(-x)=1$，且 $g(-1)=2$，$g(x-1)$ 为偶函数，则 $\sum\limits_{k=1}^{83}[f(k)+g(k)]=$ ________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在① $b_n=\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$；② $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$；③ $b_n=2^na_n$，这三个条件中任选一个补充在下面横线上，并解答问题.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=na_n-\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$.

（Ⅰ）证明：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

（Ⅱ）若 $a_1=2$，设________，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sqrt{3}b=c(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$.

（Ⅰ）求 C；

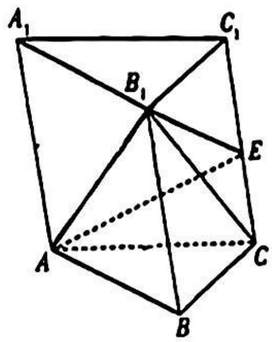
（Ⅱ）若 $AB\perp AC$，$AC=3$，角 C 的平分线交 AB 于点 D，点 E 满足 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}$，求 $\sin\angle AEB$.

19.（12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1B_1B 为菱形，E 为棱 CC_1 的中点，$\triangle AB_1C$ 为等边三角形.

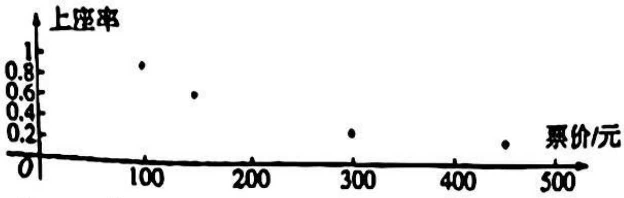
（Ⅰ）求证：$AB_1\perp B_1C_1$；

（Ⅱ）若 $AC\perp BC$，$AC=4$，$BC=3$，求平面 AA_1B_1B 和平面 AB_1E 夹角的余弦值.



20. (12分)

某剧场的座位数量是固定的，管理人员统计了最近在该剧场举办的五场表演的票价 x_i（单位：元）和上座率 y_i（上座人数与总座位数的比值）的数据，其中 $i=1,2,3,4,5$，并根据统计数据得到如下的散点图：



（Ⅰ）由散点图判断 $y=bx+a$ 与 $y=c\ln x+d$ 哪个模型能更好地对 y 与 x 的关系进行拟合（给出判断即可，不必说明理由），并根据你的判断结果求回归方程；

（Ⅱ）根据（Ⅰ）所求的回归方程，预测票价为多少时，剧场的门票收入最多.

参考数据：$\bar{x}=240$，$\bar{y}=0.5$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=365\ 000$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=457.5$；设 $z_i=\ln x_i$，则 $\sum\limits_{i=1}^{5}z_i\approx 27$，$\sum\limits_{i=1}^{5}z_i^2\approx 147.4$，$\sum\limits_{i=1}^{5}z_iy_i\approx 12.7$；$e^{5.2}\approx 180$，$e^{5.4}\approx 220$，$e^{6.4}\approx 600$.

参考公式：对于一组数据 (u_1,v_1)，(u_2,v_2)，$\cdots$，(u_n,v_n)，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

21. (12分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，三点 $M_1(-2,\sqrt{2})$，$M_2(2,-\sqrt{2})$，$M_3\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有两个点在椭圆上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若 C 的上顶点为 E，右焦点为 F，过点 F 的直线交 C 于 A,B 两点（与椭圆顶点不重合），直线 EA,EB 分别交直线 $x-y-4=0$ 于 P,Q 两点，求 $\triangle EPQ$ 面积的最小值.

22. (12分)

设函数 $f(x)=(x+1)e^x+m(x+2)^2$，$m\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若当 $x\in[-2,+\infty)$ 时，不等式 $f(x-1)\geqslant m(x^2+3x)-e$ 恒成立，求 m 的取值范围.