2023 届新高考基地学校第五次大联考
数学参考答案及评分标准

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8
D	B	D	A	B	B	A	B

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9	10	11	12
AD	ABD	BCD	AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 11　　**14.** 15　　**15.** $\frac{4\pi}{9}$　　**16.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17.（本题 10 分）

【解】（1）因为 $b-a=2a\cos C$，由正弦定理得 $\sin B-\sin A=2\sin A\cos C$，

所以 $\sin(A+C)-\sin A=2\sin A\cos C$，　　…… 2 分

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin A=2\sin A\cos C$，

所以 $\cos A\sin C-\sin A\cos C=\sin A$，

即 $\sin(C-A)=\sin A$．　　…… 4 分

因为 $-\pi<C-A<\pi$，$0<A<\pi$，所以 $C-A=A$ 或 $(C-A)+A=\pi$，

即 $C=2A$ 或 $C=\pi$（不合），

所以 $C=2A$，得证．　　…… 5 分

（2）$\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

即 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{a\sin 2A}{\sin A}=2a\cos A$，

因为 $\sin A=\frac{1}{3}$，$0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

又 $a=3$，所以 $c=4\sqrt{2}$．　　…… 7 分

由 $\cos C=\cos 2A=1-2\sin^2 A=\frac{7}{9}$，

所以 $b=a(1+2\cos C)=3\times\frac{23}{9}=\frac{23}{3}$， …… 9 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{23}{3}\times4\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=\frac{46\sqrt{2}}{9}$. ……10 分

18．（12 分）

【解】（1）由 $(2-a_n)a_{n+1}=1$，得 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$，

所以 $\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2-a_n}}-\frac{1}{1-a_n}=\frac{2-a_n}{1-a_n}-\frac{1}{1-a_n}=1$（常数）． …… 3 分

因为 $a_1=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{1}{1-a_1}=\frac{3}{2}$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{1-a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$，公差为 1 的等差数列． …… 4 分

由 $\frac{1}{1-a_n}=\frac{3}{2}+n-1=\frac{2n+1}{2}$，所以 $a_n=\frac{2n-1}{2n+1}$． …… 6 分

（2）因为 $T_n=a_1a_2a_2\cdots a_n=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$， …… 8 分

所以 $T_n^2=\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$， ……10 分

所以 $T_1^2+T_2^2+\cdots+T_n^2<\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$，得证． ……12 分

19．（12 分）

【解】（1）取 AC 的中点 O，连结 OE．

因为△AEC 为正三角形，所以 $OE\perp AC$，

又平面 $AEC\perp$ 平面 ABC，平面 $AEC\cap$ 平面 $ABC=AC$，$OE\subset$ 平面 AEC，

所以 $OE\perp$ 平面 ABC． …… 2 分

又正△AEC 的边长为 2，故 $OE=\sqrt{3}$．

因为四边形 $ABDE$ 为平行四边形，所以 $V_{ABCDE}=2V_{C-ABE}$．

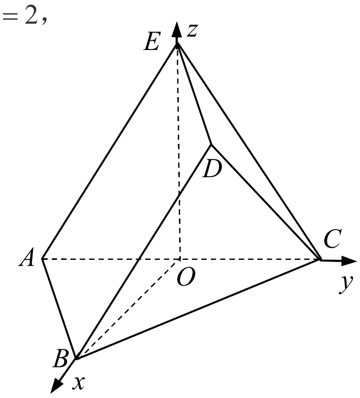
而 $V_{C-ABE}=V_{E-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OE=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3})\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}$，

故 $V_{ABCDE}=1$． …… 5 分

（2）由（1）知，以 O 为坐标原点，OC，OE 分别为 y 轴，z 轴，在平面 ABC 内

过点 O 且垂直于 OC 的直线为 x 轴，建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$.

依题意，$AB\perp BC$，$\angle CAB=60^\circ$，$CA=2$，



则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，

$B(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$.　　…… 6 分

故 $\overrightarrow{CE}=(0,-1,\sqrt{3})$.

又四边形 $ABDE$ 为平行四边形，

所以 $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$.

设 $D(a,b,c)$，则 $(a,b,c-\sqrt{3})=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，所以 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\sqrt{3}$，

故 $D(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3})$.　　…… 8 分

设平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{p}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2=0,\end{cases}$ 取 $y_2=\sqrt{3}$，则 $z_2=1$，$x_1=-1$，

所以 $\boldsymbol{p}=(-1,\sqrt{3},1)$.　　……10 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{p}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{p}}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{p}|}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以直线 AD 与平面 CDE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.　　……12 分

20.（12 分）

【解】（1）因为该地人群中卫生习惯良好的概率为 $\frac{4}{5}$，所以 $P(B)=\frac{4}{5}$，$P(\overline{B})=\frac{1}{5}$.

因为 $P(A|\overline{B})=\frac{3}{4}$，$P(B|\overline{A})=\frac{12}{13}$，

所以 $P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{1}{4}$，$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{1}{13}$，即 $\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1}{4}$，$\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{1}{13}$.

两式相除得，$\frac{P(\overline{A})}{P(\overline{B})}=\frac{13}{4}$，故 $P(\overline{A})=\frac{13}{20}$，$P(A)=\frac{7}{20}$.　　…… 2 分

所以 $P(\overline{A}B)=P(B|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{12}{13}\times\frac{13}{20}=\frac{3}{5}$，所以 $P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$.

所以 $P(A|B)=\frac{1}{4}$. …… 4 分

因为 $\frac{1}{4}<\frac{7}{20}$，所以 $P(A|B)<P(A)$，表明事件 B 的发生降低了事件 A 发生的概率，即良好的卫生习惯可以减少患病的概率. …… 6 分

（注：解释为“卫生习惯良好”与“患有地方性疾病”有关，或不独立亦可）

（2）当样本容量为 m ($m\in\mathbf{N}^*$)时，记此时的 2×2 列联表为：

	A	$\overline{A}$	合计
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	m

则 $K^2=\frac{m(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

当样本容量调整为原来的 k ($k\in\mathbf{N}^*$)倍时，由于是分层抽样抽取样本，所以有如下 2×2 列联表：

	A	$\overline{A}$	合计
B	ka	kb	$k(a+b)$
$\overline{B}$	kc	kd	$k(c+d)$
合计	$k(a+c)$	$k(b+d)$	km

…… 8 分

则 $K'^2=\frac{km(ka\cdot kd-kb\cdot kc)^2}{(ka+kb)(kc+kd)(ka+kc)(kb+kd)}=k\cdot\frac{m(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=k\cdot K^2\approx2.64k$. ……10 分

要使得能有 99.9%的把握肯定（1）中的判断，则要 $2.64k\geqslant10.828$，即 $k\geqslant4.1$，

又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 k 的最小值为 5. ……12 分

21．（12 分）

【解】（1）设直线 AC 方程为 $x=my+2$，

由 $\begin{cases}x=my+2,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消 x 得 $y^2-4my-8=0$，

所以 $\begin{cases}\Delta=16m^2+32>0,\\ y_1+y_3=4m,\\ y_1y_3=-8.\end{cases}$ …… 2 分

同理 $y_2y_4=-8$．

所以 $y_1y_2y_3y_4=64$ 为定值． …… 4 分

（2）（法一）直线 EF 的方程为 $x=2$，设直线 AD 斜率为 k_1，

则 $k_1=\dfrac{y_1-y_4}{x_1-x_4}=\dfrac{4}{y_1+y_4}$，所以直线 AD 的方程为 $y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_4}(x-x_1)$，

令 $x=2$，则 $y_E=\dfrac{4}{y_1+y_4}(2-x_1)+y_1$． …… 6 分

同理 $y_F=\dfrac{4}{y_2+y_3}(2-x_2)+y_2$．

所以 $\dfrac{|PE|}{|PF|}=\dfrac{|y_E|}{|y_F|}=\dfrac{\left|\dfrac{4(2-x_1)}{y_1-\dfrac{8}{y_2}}+y_1\right|}{\left|\dfrac{4(2-x_2)}{y_2-\dfrac{8}{y_1}}+y_2\right|}=\dfrac{\left|8y_2-4x_1y_2+y_1{}^2y_2-8y_1\right|}{\left|8y_1-4x_2y_1+y_1y_2{}^2-8y_2\right|}$ ……10 分

$$=\frac{|8y_2-4x_1y_2+4x_1y_2-8y_1|}{|8y_1-4x_2y_1+4x_2y_1-8y_2|}=\frac{|8(y_2-y_1)|}{|8(y_1-y_2)|}=1.$$

所以 $|PE|=|PF|$． ……12 分

（法二）一方面，

$\dfrac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPC}}=\dfrac{\frac{1}{2}|AP|\cdot|DP|\sin\angle APD}{\frac{1}{2}|BP|\cdot|CP|\sin\angle BPC}=\dfrac{|AP|\cdot|DP|}{|BP|\cdot|CP|}=\left|\dfrac{y_1}{y_3}\cdot\dfrac{y_4}{y_2}\right|=\left|\dfrac{y_1\cdot\dfrac{-8}{y_2}}{\dfrac{-8}{y_1}\cdot y_2}\right|=\dfrac{y_1{}^2}{y_2{}^2}$． …… 7 分

另一方面，

$$\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPC}}=\frac{\frac{1}{2}|PE||x_1-x_4|}{\frac{1}{2}|PF||x_2-x_3|}=\frac{|PE|}{|PF|}\left|\frac{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}\right|=\frac{|PE|}{|PF|}\left|\frac{y_1^2-y_4^2}{y_2^2-y_3^2}\right|=\frac{|PE|}{|PF|}\left|\frac{y_1^2-\left(\frac{-8}{y_2}\right)^2}{y_2^2-\left(\frac{-8}{y_1}\right)^2}\right|$$

$$=\frac{|PE|}{|PF|}\frac{y_1^2}{y_2^2}\left|\frac{y_1^2y_2^2-64}{y_1^2y_2^2-64}\right|=\frac{|PE|}{|PF|}\frac{y_1^2}{y_2^2},$$ ……10 分

所以 $|PE|=|PF|$. ……12 分

22. （12 分）

【解】（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$. …… 2 分

要存在两个整数满足 $f(x)<m$，则 $\begin{cases}f(2)<m,\\ f(3)\geqslant m,\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{1-\ln 2}{2}<m,\\ \frac{2-\ln 3}{3}\geqslant m.\end{cases}$

故实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{1-\ln 2}{2},\frac{2-\ln 3}{3}\right]$. …… 4 分

（2）当 $a\leqslant 0$ 时，$f(1)=\mathrm{e}^a-1<0$，不合；

当 $a>0$ 时，因为 $f'(x)=a\mathrm{e}^{ax}+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{ax^2\mathrm{e}^{ax}+\ln x}{x^2}$，

设 $g(x)=ax^2\mathrm{e}^{ax}+\ln x$，因为 $g'(x)=a\left(ax^2+2x\right)\mathrm{e}^{ax}+\frac{1}{x}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …… 6 分

令 $g(x)=ax^2\mathrm{e}^{ax}+\ln x=0$ 得，$ax\cdot\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}$，（*）

令 $h(x)=x\mathrm{e}^x$，$x>0$，则上式为 $h(ax)=h\left(\ln\frac{1}{x}\right)$，

因为 $h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(ax)=h\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ 等价于 $ax=\ln\frac{1}{x}$，$\ln x+ax=0$，

令 $\phi(x)=\ln x+ax$，$x>0$，则 $\phi'(x)=\frac{1}{x}+a>0$，

所以$\phi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为$\phi(\mathrm{e}^{-a})=a(\mathrm{e}^{-a}-1)<0$，$\phi(\mathrm{e}^{a})=a(\mathrm{e}^{a}+1)>0$，

所以存在唯一$x_0\in(0,+\infty)$，$\phi(x_0)=0$，即$g(x_0)=0$，　　　　……10 分

当$x\in(0,x_0)$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

因为$ax_0=\ln\dfrac{1}{x_0}=-\ln x_0$，

所以$f_{\min}(x)=f(x_0)=\mathrm{e}^{ax_0}-\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=a$.

所以$a=1$.　　　　……12 分