金华十校 2022–2023 学年第二学期调研考试

高二数学卷评分标准与参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	D	A	B	C	D	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

题号	9	10	11	12
答案	ABC	AD	AB	BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．-220　　14．$y=x+1$　　15．$\frac{1}{6}$　　16. $a<-6$ 或 $a>0$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(Ⅰ)由 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha$ 得 $\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，

则 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha\neq 0$，

解得 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，又 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，则 $\alpha=\frac{\pi}{12}$. ……………………………………………………… 5 分

(Ⅱ) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+2\times\frac{1-\cos x}{2}$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，……………………………………………………………… 8 分

$\because x\in[0,\pi]$，所以 $x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，当 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$的最大值为 2. …… 10 分

18．解：(Ⅰ)(0.004+0.020+0.044+x+0.044+0.010+0.010)×5=1，………………………… 3 分

解得 x=0.068．…………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)列联表如下：

养殖法	箱产量		合计
	箱产量<50kg	箱产量≥50kg	
旧养殖法	60	40	100
新养殖法	34	66	100
合计	94	106	200

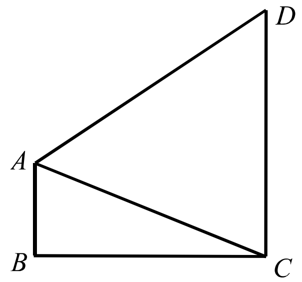
…………………………………………………………………………………… 8 分

零假设为 H_0：箱产量与养殖方法独立，即箱产量与养殖方法无关.

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200\times(60\times66-40\times34)^2}{100\times100\times94\times106}\approx13.57\geqslant6.635$，… 10 分

所以推断 H_0 不成立,即箱产量与养殖方法有关,此推断犯错误的概率不大于 0.01．…12 分

19．解：(Ⅰ)在△ABC 中，由 $\sin\angle BAC=\sqrt{3}\sin\angle ACB$，



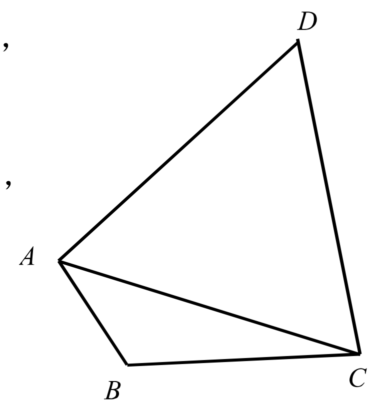
可知 $BC=\sqrt{3}AB=\sqrt{3}$．……………………… 2 分

由于 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，∴ $\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，∴ $\angle BCD=\dfrac{\pi}{2}$．

$DC=AC=2$，∴ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$，∴$x=2$，$y=1$．…………………… 6 分

(Ⅱ)在△ABC 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B}=\sqrt{7}$，……………… 8 分

所以 $\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{7}^2+1^2-\sqrt{3}^2}{2\times1\times\sqrt{7}}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，$\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，



$\cos\angle BAD=\cos\left(\angle BAC+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$，

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos\angle BAD}$

$=\sqrt{1^2+\sqrt{7}^2-2\times1\times\sqrt{7}\times\dfrac{1}{2\sqrt{7}}}=\sqrt{7}$．

∴$BD=\sqrt{7}$．…………………………………………………………………12 分

20．解：(Ⅰ)过 E 作 $EF/\!/PC$ 交线段 DC 于 F，连接 AF.

∵$EF/\!/PC$，$PC\subset$平面 PBC，

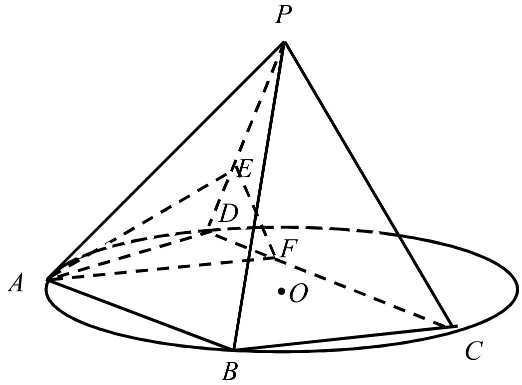
∴$EF/\!/$平面 PBC，

又∵$AE/\!/$平面 PBC，$EF\cap AE=E$，

∴平面 $AEF/\!/$平面 PBC，

∵平面 $AEF\cap$平面 $ABCD=AF$，

平面 $PBC\cap$平面 $ABCD=BC$，



∴$AF/\!/BC$. ………………………………………………………………………… 3 分

又∵$AB/\!/CD$，∴四边形 $ABCF$ 是平行四边形，∴$CF=AB=2$，而 $CD=4$，

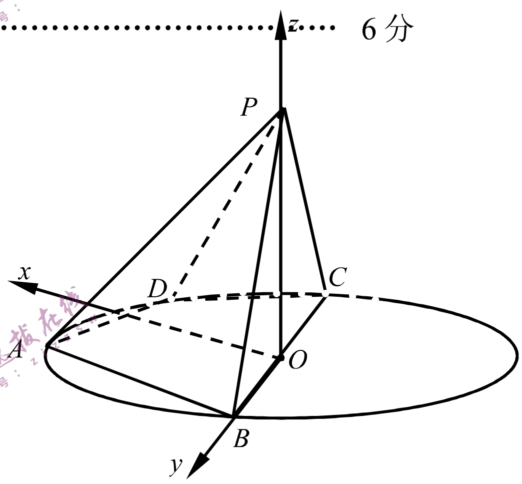
故 $CF=\dfrac{1}{2}CD$，得 $PE=\dfrac{1}{2}PD$，得$\lambda=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………… 6 分

(Ⅱ)$V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCD}\times PO$，得 $S_{\text{四边形}ABCD}=3\sqrt{3}$.

由 $S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$ 得 $S_{\triangle BCD}=2\sqrt{3}$ ，

于是 C 与到直线 BD 的距离为 2，………… 8 分

满足 $AB/\!/CD$ 或 $AD/\!/BC$，故只能 $AD/\!/BC$.



此时，BC 为直径，直径为 4.

以 O 为原点，射线 OB，OP 为 y，z 轴如图建立空间直角坐标系. ……………… 9 分

则 $A(\sqrt{3}，1，0)$，$B(0，2，0)$，$C(0，-2，0)$，$P(0，0，\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{2})$ ，$\overrightarrow{PB}=(0,2,-\sqrt{2})$ ，$\overrightarrow{PC}=(0,-2,-\sqrt{2})$ ，………………… 10 分

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y-\sqrt{2}z=0,\\ 2y-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=\sqrt{2}$ ，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,\sqrt{2}\right)$ ，…………………………… 11 分

设直线 PC 与平面 PAB 所成角为θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PC}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{30}}{3}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

∴直线 PC 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$． ………………………………… 12 分

21．解：(Ⅰ) **方法 1：** ξ 取值为 $0,1,2,3$，每次取到白球的概率 $p=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$．………… 2 分

因为 $\xi\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，故 $E(\xi)=3\times\frac{2}{3}=2$ ……………………………………………4 分

方法 2： $P(\xi=i)=C_3^i\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^{3-i}\quad(i=0,1,2,3)$

所以 ξ 分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

…… 3 分

故 $E(\xi)=3\times\frac{2}{3}=2$ ……………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)抛掷两颗骰子，记点数之和除以 3 的余数等于 i（i=0，1，2）为事件 A_i，

则点数之和等于 3，6，9，12 的分别有 $(1,2),(2,1)$ 2 种；$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ 5 种；

$(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$ 4 种；$(6,6)$ 1 种情况；故 $P(A_0)=\frac{2+5+4+1}{36}=\frac{1}{3}$．

点数之和等于 4 有 $(1,3),(2,2),(3,1)$ 3 种；等于 7 有 $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ 6 种；

等于 10 有 $(4,6),(5,5),(6,4)$ 3 种；故 $P(A_1)=\frac{3+6+3}{36}=\frac{1}{3}$．

点数之和等于 2 有 $(1,1)$ 1 种；等于 5 有 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ 4 种；等于 8 有

$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$ 5 种；等于 11 有 $(5,6),(6,5)$ 2 种，故 $P(A_2)=\frac{1+4+5+2}{36}=\frac{1}{3}$．

所以 $P(A_0)=P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{3}$． ……………………………………………… 7 分

记摸出的 3 个球中至少有 2 个白球记为事件 B，则

$P(B\mid A_0)=\frac{C_5^2\cdot C_1^1}{C_6^3}+\frac{C_5^3}{C_6^3}=1$，$P(B\mid A_1)=\frac{C_4^2\cdot C_2^1}{C_6^3}+\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{4}{5}$，

$P(B\mid A_2)=\frac{C_3^2\cdot C_3^1}{C_6^3}+\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{2}$ ……………………………………………… 10 分

由全概率公式可得$P(B)=P(A_0)\cdot P(B|A_0)+P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)$

$=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{23}{30}$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(Ⅰ) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}-\frac{3}{2}\ln x$，

所以 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x}=\frac{2x^2-3x-2}{2x^2}=\frac{(2x+1)(x-2)}{2x^2}$，……………………… 2 分

令 $f'(x)>0$ 得 $x>2$，令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<2$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是$(2,+\infty)$，单调递减区间是$(0,2)$. …………… 4 分

(Ⅱ)(ⅰ) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax-1}{x^2}$，

设 $g(x)=x^2-ax-1$，$g(0)=-1$，$g(1)=-a<0$，$g(a)=-1$，$g(a+1)=a>0$，

∴存在唯一 $x_0\in(a,a+1)$ 且 $x_0>1$，使得 $g(x_0)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增，x_0 是极小值点. ………………… 6 分

若 $a\leqslant$e，则 $f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{x_0^2+1}{x_0}-a\ln x_0\geqslant\frac{x_0^2+1}{x_0}-\mathrm{e}\ln x_0>x_0-\mathrm{e}\ln x_0\geqslant 0$，不满足要求，

故要使函数 $f(x)$ 有两个不相等的零点 x_1，x_2，则 $f(x_0)<0$，$a>$e.

于是 e$<a<x_0<a+1$. ………………………………………………………………… 8 分

(ⅱ) $f(x_1)=x_1+\frac{1}{x_1}-a\ln x_1=0$ ①，$f(x_2)=x_2+\frac{1}{x_2}-a\ln x_2=0$ ②，

①−②得 $x_1-x_2+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=a(\ln x_1-\ln x_2)$，整理得 $1-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$ ③.

下证：$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$. 不妨设 $0<x_1<x_2$，令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $0<t<1$.

$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ 可化为 $\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\frac{x_1}{x_2}+1}>\frac{1}{2}\ln\frac{x_1}{x_2}$，即 $\frac{t-1}{t+1}>\frac{1}{2}\ln t$.

令 $h(t)=\frac{1}{2}\ln t-\frac{t-1}{t+1}$， $h'(t)=\frac{1}{2t}-\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2}$>0，于是 $h(t)$ 在(0, 1)上单调递增，

又 $h(1)$=0，所以 $h(t)=\frac{1}{2}\ln t-\frac{t-1}{t+1}<0$，从而 $\frac{t-1}{t+1}>\frac{1}{2}\ln t$，

得 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$． ………………………………………………………… 10 分

于是③式可化为 $1-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}>\frac{2a}{x_1+x_2}$，得 $x_1+x_2>2a+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}>2a$．

$x_1+x_2>2a$ 得证．…………………………………………………………………… 12 分