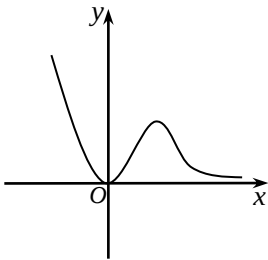


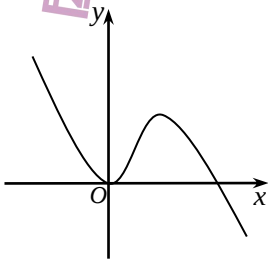
数学试卷（文科）

考试时长：120 分钟 满分：150 分

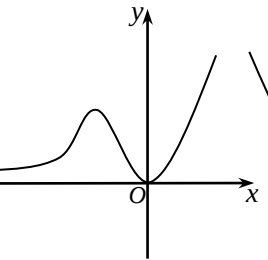
一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知复数 $z = (m-1) + (m+1)i$, ($m \in \mathbb{R}$) 为纯虚数, 则实数 m 的值为 ()
 (A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 1 或 -1
2. 在极坐标系中, 以极点为圆心, 1 为半径的圆的极坐标方程为 ()
 (A) $\rho \cos \theta = 1$ (B) $\rho \sin \theta = 1$ (C) $\rho = 1$ (D) $\theta = \frac{\pi}{4}$
3. 利用分析法证明不等式 $M > N$ 成立, 只需证明 $P > N$ 成立即可, 则“ $P > N$ 成立”是“ $M > N$ 成立”的 ()
 (A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要
4. 已知 (x_0, y_0) 是圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上一点, 则直线 $x_0x + y_0y = r^2$ 与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 相切, 且 (x_0, y_0) 为切点, 类似的, 点 (x_0, y_0) 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上一点, 则以 (x_0, y_0) 为切点, 与椭圆相切的切线方程为 ()
 (A) $x_0x + y_0y = 1$ (B) $x_0x + y_0y = a^2b^2$ (C) $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ (D) $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$
5. 已知复数 $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) 对应的点在第一象限, z 的实部和虚部分别是双曲线 C 的实轴长和虚轴长, 若 $|z| = 4$, 则双曲线 C 的焦距为 ()
 (A) 8 (B) 4 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2
6. 函数 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ 的大致图像为 ()
- 

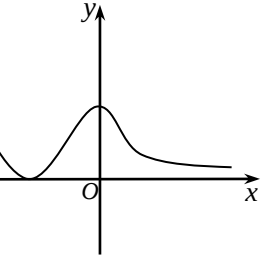
(A)



(B)



(C)



(D)
7. 已知函数 $f(x) = x^3 + f'(1)x^2$, 则 $f'(1) =$ ()
 (A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 3 (D) -3
8. 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 经过坐标变换 $\varphi: \begin{cases} x' = 4x \\ y' = 2y \end{cases}$ 后得到的曲线方程为 ()

(A) $16x^2 + 4y^2 = 1$ (B) $4x^2 + 2y^2 = 1$ (C) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

9. 已知函数 $f(x) = a \sin x + \cos x$ 区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 则实数 a 的范围是 ()

(A) $(-\infty, 1]$ (B) $[0, +\infty)$ (C) $[\sqrt{2}, +\infty)$ (D) $[1, +\infty)$

10. 已知 $a = e^{-0.5}, b = 0.5, c = \ln 1.5$, 则下列不等关系正确的是 ()

(A) $a > c > b$ (B) $a > b > c$ (C) $b > a > c$ (D) $c > b > a$

11. 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上下焦点分别为 F_1, F_2 , 抛物线 $E: x^2 = 4y$ 与椭圆 C 有相同的焦点, 点 P 为抛物线 E 与椭圆 C 在第一象限内的交点, 直线 PF_2 与抛物线 E 相切, 则椭圆 C 的长轴长为 ()

(A) $2\sqrt{2} + 2$ (B) $\sqrt{2} + 2$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

12. 关于函数 $f(x) = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{x}) - \ln x$ 的零点, 下列说法正确的是 ()

(A) 函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 x_2 = 1$
 (B) 函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 x_2 \neq 1$
 (C) 函数 $f(x)$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 x_2 x_3 = 1$
 (D) 函数 $f(x)$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 x_2 x_3 \neq 1$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 复数 $z = \frac{2-i}{1+2i}$ 的共轭复数为 $\bar{z}$, 则 $\bar{z} =$ _____

14. 在极坐标系中, 点 $A(4, \frac{\pi}{6})$, $B(2, \frac{\pi}{2})$, 则线段 AB 的长为 _____.

15. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f(0) = 1$, 且 $f'(x) > f(x)$, 则不等式 $f(x) > e^x$ 的解集为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = x + \sin x, (x \in \mathbb{R})$, 有以下四个命题:

① 曲线 $y = f(x)$ 在 (π, π) 处的切线方程为 $y = \pi$;

② $x = \pi$ 是函数 $f(x)$ 的极值点;

③ 对 $\forall x > 0$, 不等式 $f(x) < 2x$ 恒成立;

④ $\sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{8\pi}{7} < \frac{2\pi}{7}$.

其中正确的命题有 _____. (将正确的序号都写上, 多写漏写均不得分)

三、解答题（共 70 分）

17.（本小题 10 分）已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = 4\rho \cos \theta - 3$ ，A, B 是曲线 C 上不同的两点，且 $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$ ，其中 O 为极点.

（I）求曲线 C 的直角坐标方程；

（II）求点 B 的极径.

18.（本小题 12 分）某企业生产的某种乳制品的蛋白质含量 x （%）与生产成本 y （元）之间的数据如下表：

x	0	0.69	1.39	1.79	2.40	2.56	2.94
y	19	32	40	44	52	53	54

已知生产成本 y 与产品蛋白质含量 x 之间具有线性相关关系.

（I）求生产成本 y 关于蛋白质含量 x 的回归方程；

（II）根据（I）的结果，若公司准备将生产成本提高到 60 至 70 元，则判断生产的乳制品蛋白质含量的取值范围。（精确到小数点后两位）

参考公式：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

参考数据： $\bar{x} = 1.68, \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = 6.79, \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 81.41.$

19.（本小题 12 分）函数 $f(x) = e^x(x^2 - ax - a)$.

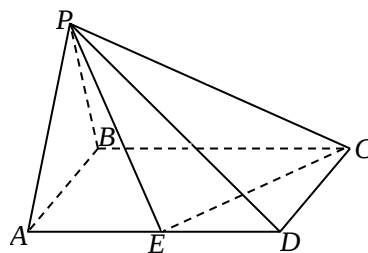
（I）若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值，并判断 $x=1$ 是极大值点还是极小值点；

（II）求函数 $f(x)$ 的单调区间.

20. (本小题 12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $\triangle PAB$ 为边长为 2 的正三角形, 且平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, E 为线段 AD 的中点, PE 与平面 $ABCD$ 所成角为 45° .

(I) 证明: $EP = EC$;

(II) 求证: 平面 $PCE \perp$ 平面 PBC .



21. (本小题 12 分) 已知过点 $(0,2)$ 的直线与抛物线 $x^2 = 4y$ 相交于 A, B 两点, M 为线段 AB 的中点, 过 M 作 x 轴的垂线与抛物线交于点 N .

(1) 若抛物线在 N 点处的切线的斜率等于 2, 求直线 AB 的方程;

(2) 设 $D(0,11)$, 求 $\triangle DAB$ 与 $\triangle NAB$ 面积之差的最大值.

22. (本小题 12 分) 函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}ax^2 - (a+2)x + \frac{1}{2}a + 3$, 其中 $a \geq 1$.

(I) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调递减, 求 $x_2 - x_1$ 的最大值;

(II) 曲线 $C: y = f(x)$ 在 $(1,1)$ 处的切线为 l , 若直线 l 与曲线 C 有且仅有一个公共点, 求 a 满足的条件.