湖南师大附中 2023 届高三月考试卷(七)
数学参考答案

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	D	B	D	A	B	C

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	ABD	AC	ACD	ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,多空题,第一空 2 分,第二空 3 分,共 20 分.

13. $\frac{1}{24}$

14. $(4,+\infty)$

15. 4

16. $(0,e^2)$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 对称中心为 $(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}),k\in Z$.

(2)$t\in[0,1]$

18. (1) 略

(2)$\cos\angle ANM=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

19. (1)$a_n=2n,n\in N^*$;

(2)$T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$

20. (1)690 人;

(2)$E(X)=\frac{12}{5}$,分布列略.

21. (1)$x^2+\frac{y^2}{2}=1$

(2) 证明略.

22. (1) 当 $x\in[0,\pi]$ 时,$f(x)>0$.

(2)$a=2$.

湖南师大附中2023届高三月考试卷（七）

数学

时量：120分钟满分：150分

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知模为2的复数z对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$（O为坐标原点），它对应的点位于第二象限，$\overrightarrow{OZ}$与实轴正向的夹角为$150°$，则复数z为（　　）

A. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. 2　　C. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D. $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】设复数z对应的点为(x,y)，根据题意可得$x=|z|\cos150°, y=|z|\sin150°$，即可得解.

【详解】设复数z对应的点为(x,y)，

则$x=|z|\cos150°=-\sqrt{3}, y=|z|\sin150°=1$，

所以$z=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

故选：D.

2. 若一个n位正整数的所有数位上数字的n次方和等于这个数本身，则称这个数是自恋数，已知所有一位正整数的自恋数组成集合A，集合$B=\{x\in Z|-3<x<4\}$，则$A\cap B$真子集个数为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】根据题中定义，结合集合交集的定义、真子集个数公式进行求解即可.

【详解】由题中定义可知 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，而 $B=\{x\in Z|-3<x<4\}$，

所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$，因此 $A\cap B$ 真子集个数为 $2^3-1=7$，

故选：C

3. 已知 $f(x)$ 为奇函数，且 $x<0$ 时，$f(x)=e^x$，则 $f(e)=$（　　）

A. e^e　　B. $-e^e$　　C. e^{-e}　　D. $-e^{-e}$

【答案】D

【解析】

【分析】由奇函数性质及解析式求解即可.

【详解】$f(x)$ 为奇函数，且 $x<0$ 时，$f(x)=e^x$，$f(e)=-f(-e)=-e^{-e}$.

故选：D

4. 杭州亚运会共设40个竞赛大项，包括31个奥运项目和9个非奥运项目，共设杭州赛区、宁波赛区、温州赛区、金华赛区、绍兴赛区、湖州赛区、现需从6名管理者中选取4人分别到温州、金华、绍兴、湖州四个赛区负责志愿者工作，要求四个赛区各有一名管理者，且6人中甲、乙两人不去温州赛区，则不同的选择方案共有（　　）

A. 300种　　B. 240种　　C. 144种　　D. 96种

【答案】B

【解析】

【分析】利用排列组合的知识分别求解甲、乙都没有被选派、甲、乙有且仅有一人被选派和甲、乙均被选派三种情况下的方案数，加和即可求得结果.

【详解】若甲、乙都没有被选派，则共有 $A_4^4=24$ 种方案；

若甲、乙有且仅有一人被选派，则共有 $C_2^1C_3^1A_4^3=144$ 种方案；

若甲、乙均被选派，则共有 $C_4^1C_3^1A_3^3=72$ 种方案；

综上所述：不同的选择方案有 $24+144+72=240$ 种.

故选：B.

5. "碳达峰"是指二氧化碳的排放不再增长，达到峰值之后开始下降，而"碳中和"是指企业、团体或个人通过植树造林、节能减排等形式，抵消自身产生的二氧化碳排放量，实现二氧化碳"零排放". 某地区二氧化碳的排放量达到峰值 a（亿吨）后开始下降，其二氧化碳的排放量 S（亿吨）与时间 t（年）满足函数关系式 $S=ab^t$，

若经过4年，该地区二氧化碳的排放量为$\frac{3a}{4}$（亿吨）．已知该地区通过植树造林、节能减排等形式抵消自身产生的二氧化碳排放量为$\frac{a}{3}$（亿吨），则该地区要实现"碳中和"，至少需要经过（　　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.30,\lg 3\approx 0.48$）

A. 13年　　B. 14年　　C. 15年　　D. 16年

【答案】D

【解析】

【分析】由条件列式$ab^4=\frac{3a}{4}$先确定参数，再结合对数运算解方程$ab^t=\frac{a}{3}$.

【详解】由题意，$S=ab^4=\frac{3a}{4}$，即$b^4=\frac{3}{4}$，所以$b=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$，

令$ab^t=\frac{a}{3}$，即$b^t=\frac{1}{3}$，故$\left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)^t=\frac{1}{3}$，即$t\lg\sqrt[4]{\frac{3}{4}}=\lg\frac{1}{3}$，

可得$\frac{1}{4}t(\lg 3-2\lg 2)=-\lg 3$，即$t=\frac{4\lg 3}{2\lg 2-\lg 3}\approx 16$.

故选：D

6. 已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$．短轴的一个端点为$M$，直线$l:3x-4y=0$交椭圆$E$于$A,B$两点．若$|AF|+|BF|=4$，点$M$到直线$l$的距离不小于$\frac{4}{5}$，则椭圆$E$的离心率的取值范围是

A. $(0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　B. $(0,\frac{3}{4}]$　　C. $[\frac{\sqrt{3}}{2},1)$　　D. $[\frac{3}{4},1)$

【答案】A

【解析】

【详解】试题分析：设F_1是椭圆的左焦点，由于直线$l:3x-4y=0$过原点，因此A,B两点关于原点对称，从而AF_1BF是平行四边形，所以$|BF_1|+|BF|=|AF|+|BF|=4$，即$2a=4$，$a=2$，设$M(0,b)$，则$d=\frac{4b}{5}$，所以$\frac{4b}{5}\geq\frac{4}{5}$，$b\geq 1$，即$1\leq b<2$，又$c^2=a^2-b^2=4-b^2$，所以$0<c\leq\sqrt{3}$，$0<\frac{c}{a}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$．故选A.

考点：椭圆的几何性质．

【名师点睛】本题考查椭圆的离心率的范围，因此要求得a,c关系或范围，解题的关键是利用对称性得出$|AF|+|BF|$就是$2a$，从而得$a=2$，于是只有由点到直线的距离得出b的范围，就得出c的取值范围，从而

得出结论．在涉及到椭圆上的点到焦点的距离时，需要联想到椭圆的定义．

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$，正数 a,b 满足 $f(2a)=1-f(b-2)$，则 $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{2ab+b^2}$ 的最小值（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】利用 $f(-x)+f(x)=1$ 可得 $2a+b=2$，由此可化简所求式子，结合基本不等式可求得最小值．

【详解】$\because f(-x)+f(x)=\dfrac{1}{2^{-x}+1}+\dfrac{1}{2^x+1}=\dfrac{2^x}{1+2^x}+\dfrac{1}{2^x+1}=1$，且 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

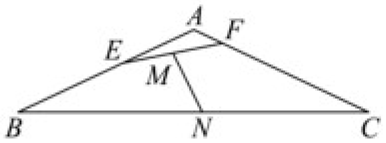
$\therefore$ 由 $f(2a)=1-f(b-2)$ 得：$2a=2-b$，即 $2a+b=2$，$\because a,b>0$，

$\therefore \dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{2ab+b^2}=\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b(2a+b)}=\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{2b}\geq 2\sqrt{\dfrac{2b}{a}\cdot\dfrac{a}{2b}}=2$（当且仅当 $a=\dfrac{4}{5},b=\dfrac{2}{5}$ 时取等号），

则 $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{2ab+b^2}$ 的最小值为 2．

故选：B.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC=1$，$\angle A=120°$，E，F 分别是边 AB，AC 上的点，且 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，其中 λ，$\mu\in(0,1)$，且 $\lambda+4\mu=1$，若线段 EF，BC 的中点分别为 M，N，则 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值为（　　）



A. $\dfrac{1}{7}$　　B. $\dfrac{3}{7}$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平面向量加法的运算法则，结合平面向量基本定理和平面向量数量积的运算性质进行求解即可．

【详解】因为 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，所以

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FE}\right)+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}\right)+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$=\frac{1}{2}\left(\lambda\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{AC}\right)+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-\mu)\overrightarrow{AC}$，

因为$\lambda+4\mu=1$，

所以$\overrightarrow{MN}=2\mu\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-\mu)\overrightarrow{AC}$，所以

$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\left[2\mu\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-\mu)\overrightarrow{AC}\right]^2}=\sqrt{4\mu^2\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}(1-\mu)^2\overrightarrow{AC}^2+2\mu(1-\mu)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$,

因为$AB=AC=1$，$\angle A=120°$，

所以$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{4\mu^2+\frac{1}{4}(1-\mu)^2-2\mu(1-\mu)\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{21}{4}\mu^2-\frac{3}{2}\mu+\frac{1}{4}}$，

当$\mu=-\frac{-\frac{3}{2}}{2\times\frac{21}{4}}=\frac{1}{7}\in(0,1)$时，$\left|\overrightarrow{MN}\right|$有最小值，

最小值为$\sqrt{\frac{21}{4}\times\left(\frac{1}{7}\right)^2-\frac{3}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

故选：C

【点睛】关键点睛：运用平面向量加法的运算法则，利用平面向量数量积的运算性质是解题的关键.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 假设某市场供应的职能手机中，市场占有率和优质率的信息如下

品牌	甲	乙	其他
市场占有率	50%	30%	20%
优质率	80%	90%	70%

在该市场中任意买一部手机，用A_1，A_2，A_3分别表示买到的智能手机为甲品牌、乙品牌，其他品牌，B表示可买到的优质品，则（　　）

A. $P(A_1)=0.50$　　B. $P(B|A_2)=0.90$　　C. $P(BA_3)=0.70$　　D. $P(B)=0.81$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据条件概率公式及相互独立事件的概率公式计算可得；

【详解】解：依题意可得 $P(A_1)=0.50$，$P(B|A_2)=0.90$，$P(B|A_3)=0.70$，$P(A_3)=0.20$，因为

$P(B|A_3)=\dfrac{P(BA_3)}{P(A_3)}$，所以 $P(BA_3)=P(B|A_3)\cdot P(A_3)=0.70\times 0.20=0.14$，

$P(B)=0.5\times 0.8+0.3\times 0.9+0.2\times 0.7=0.81$，故正确的有 ABD；

故选：ABD

10. "杨辉三角"是二项式系数在三角形中的一种几何排列，在中国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中就有出现.如图所示，在"杨辉三角"中，除每行两边的数都是 1 外，其余每个数都是其"肩上"的两个数之和，例如第 4 行的 6 为第 3 行中两个 3 的和.则下列命题中正确的是（　　）

第 0 行　　1
第 1 行　　1　1
第 2 行　　1　2　1
第 3 行　　1　3　3　1
第 4 行　　1　4　6　4　1
第 5 行　　1　5　10　10　5　1
⋮　　⋮
……………………………………………………
第 n 行
⋮

A. $C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{10}^2=164$

B. 在第 2022 行中第 1011 个数最大

C. 记"杨辉三角"第 n 行的第 i 个数为 a_i，则 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\left(2^{i-1}a_i\right)=3^n$

D. 第 34 行中第 15 个数与第 16 个数之比为 $2:3$

【答案】AC

【解析】

【分析】利用二项式定理，结合组合数运算性质逐一判断即可.

【详解】A：

$C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{10}^2=C_3^2+C_3^3+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{10}^2-C_3^3=C_4^3+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{10}^2-C_3^3=C_{11}^3-C_3^3=164$,

所以本选项正确；

B：第 2022 行是二项式 $(a+b)^{2022}$ 的展开式的系数，故第 2022 行中第 $\dfrac{2022}{2}+1=1012$ 个数最大，所以本选项不正确；

C：“杨辉三角”第 n 行是二项式 $(a+b)^n$ 的展开式系数，

所以 $a_i=\mathrm{C}_n^{i-1}$，

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(2^{i-1}a_i\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\left(2^{i-1}\cdot\mathrm{C}_{n-1}^{r-1}\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\left(\mathrm{C}_n^{r-1}\cdot1^{n-i+1}\cdot2^{i-1}\right)=(1+2)^n=3^n,$$

因此本选项正确；

D：第 34 行是二项式 $(a+b)^{34}$ 的展开式系数，

所以第 15 个数与第 16 个数之比为 $\mathrm{C}_{34}^{14}:\mathrm{C}_{34}^{15}=3:4$，因此本选项不正确，

故选：AC

11. 已知球 O 的半径为 4，球心 O 在大小为 45° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 内，二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面所在的平面分别截球面得两个圆 O_1，O_2，若两圆 O_1，O_2 的公共弦 AB 的长为 4，E 为 AB 的中点，四面体 OAO_1O_2 得体积为 V，则一定正确的是（　　）

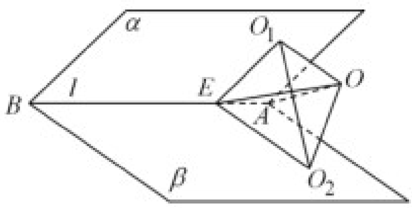
A. O，E，O_1，O_2 四点共圆　　　　B. $OE=\sqrt{3}$

C. $O_1O_2=\sqrt{6}$　　　　D. V 的最大值为 $\sqrt{2}-1$

【答案】ACD

【解析】

【分析】连结 OE,O_1E,O_2E,O_1O_2,OA，判断出 $OA=4,AE=2$，利用勾股定理求 OE，判断 B，证明 $OO_1\perp O_1E,OO_2\perp O_2E$，$O,O_1,E,O_2$ 四点共面，即可判断 O,E,O_1,O_2 四点共圆，判断 A，利用正弦定理求出 O_1O_2，由此判断 C；设 $OO_1=d_1,OO_2=d_2$，求出 $S_{\triangle OO_1O_2}$ 的最大值，结合体积公式判断 D.

【详解】

因为公共弦 AB 在棱 l 上，连结 OE,O_1E,O_2E,O_1O_2,OA，则 $OA=4,AE=2$，

则 $OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，故 B 错误；

因为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面分别截球面得两个圆 O_1，O_2，O 为球心，

所以 $OO_1\perp\alpha$，$OO_2\perp\beta$，又 $O_1E,AB\subset$ 平面 α，，$O_2E,AB\subset$ 平面 β，

所以$OO_1 \perp O_1E$, $OO_2 \perp O_2E$，$OO_1 \perp AB$, $OO_2 \perp AB$，

因为$OO_1, OO_2 \subset$平面OO_1O_2，所以$AB \perp$平面OO_1O_2，同理可证$AB \perp$平面O_1EO_2，

所以O, O_1, E, O_2四点共面，又$\angle OO_1E = \angle OO_2E = 90°$，

所以$\angle O_1EO_2 + \angle O_1OO_2 = 180°$，对角互补的四边形为圆内接四边形，

所以O, E, O_1, O_2四点共圆，故选项 A 正确；

因为E为弦AB的中点,故$O_1E \perp AB$，　$O_2E \perp AB$，

故$\angle O_1EO_2$为二面角$\alpha - l - \beta$的平面角，所以$\angle O_1EO_2 = 45°$，

由正弦定理得$O_1O_2 = OE\sin 45° = \sqrt{6}$，故选项 C 正确；

设$OO_1 = d_1, OO_2 = d_2$，在$\triangle OO_1O_2$中,由余弦定理可得，

$O_1O_2{}^2 = 6 = d_1{}^2 + d_2{}^2 + \sqrt{2}d_1d_2 \ge \left(2+\sqrt{2}\right)d_1d_2$　，所以$d_1d_2 \le 3\left(2-\sqrt{2}\right)$，

故$S_{\triangle OO_1O_2} \le \dfrac{1}{2}d_1d_2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \dfrac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$，所以$V = \dfrac{1}{3}AE \cdot S_{\triangle OO_1O_2} \le \dfrac{1}{3} \times 2 \times \dfrac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = \sqrt{2}-1$，

当且仅当以$d_1 = d_2 = \sqrt{6-3\sqrt{2}}$时取等号，故选项 D 正确，

故选：ACD

12. 2021 年 3 月 30 日，小米正式开始启用具备"超椭圆"数学之美的新 logo（如图所示），设计师的灵感来源于曲线$C: \left|\dfrac{x}{a}\right|^n + \left|\dfrac{y}{b}\right|^n = 1 (n > 0, n \in \mathrm{R})$．当$n = 4, a = 2, b = 1$时，下列关于曲线$C$的判断正确的有（　　）

A. 曲线C关于x轴和y轴对称

B. 曲线C所围成的封闭图形的面积小于 8

C. 设$M\left(\sqrt{3}, 0\right)$，直线$x - y + \sqrt{3} = 0$交曲线$C$于$P, Q$两点，则$\triangle PQM$的周长小于 8

D. 曲线C上的点到原点O的距离的最大值为$17^{\frac{1}{4}}$

【答案】ABD

【解析】

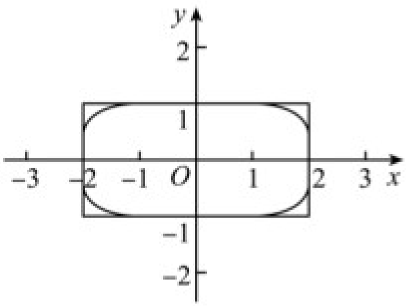
【分析】根据用$-y$替换y，x不变，得方程不变，用$-x$替换x，y不变，得方程不变，可判断 A 正确；根

据曲线C的范围，可判断B正确：先得到椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$在曲线$C:\frac{x^4}{16}+y^4=1$内(除四个交点外)，再根据椭圆的定义可判断C不正确：利用两点间的距离公式、三角换元和三角函数知识求出最大值，可判断D正确；

【详解】当$n=4,a=2,b=1$时，曲线C：$\frac{x^4}{16}+y^4=1$，

对于A，用$-y$替换y，x不变，得$\frac{x^4}{16}+\left(-y\right)^4=1$，即$\frac{x^4}{16}+y^4=1$，则曲线$C$关于$x$轴对称；用$-x$替换$x$，$y$不变，得$\frac{(-x)^4}{16}+y^4=1$，即$\frac{x^4}{16}+y^4=1$，则曲线$C$关于$y$轴对称，故A正确；

对于B，由$\frac{x^4}{16}+y^4=1$，得$|x|\leqslant 2$，$|y|\leqslant 1$，所以曲线C在由直线$x=\pm 2$和$y=\pm 1$所围成的矩形内（除曲线与坐标轴的四个交点外），所以曲线C所围成的封闭图形的面积小于该矩形的面积，该矩形的面积为$4\times 2=8$，故B正确；



对于C，对于曲线$C:\frac{x^4}{16}+y^4=1$和椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

设点(x,y_1)在$\frac{x^4}{16}+y^4=1$上，点(x,y_2)在$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上，

因为$y_1^4-y_2^4=1-\frac{x^4}{16}-(1-\frac{x^2}{4})^2=(1-\frac{x^2}{4})(1+\frac{x^2}{4})-(1-\frac{x^2}{4})^2$

$=(1-\frac{x^2}{4})(1+\frac{x^2}{4}-1+\frac{x^2}{4})=\frac{1}{2}x^2(1-\frac{x^2}{4})\geq 0$，

所以$y_1^4\geq y_2^4$，所以$|y_1|\geq|y_2|$，

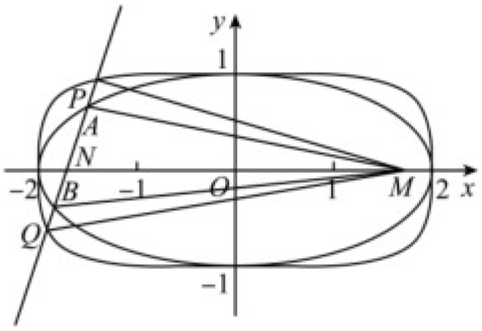
设点(x_1,y)在$\frac{x^4}{16}+y^4=1$上，点(x_2,y)在$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上，

因为$x_1^4-x_2^4=16(1-y^4)-\left(4(1-y^2)\right)^2=4(1-y^2)\left(4(1+y^2)-4(1-y^2)\right)$

$=4(1-y^2)\cdot 2y^2=8y^2(1-y^2)\geq 0$，

所以$x_1^4\geq x_2^4$，所以$|x_1|\geq|x_2|$，

所以椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$在曲线$C:\frac{x^4}{16}+y^4=1$内（除四个交点外），如图：



设直线$x-y+\sqrt{3}=0$交椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$于A,B两点，交x轴于$N(-\sqrt{3},0)$，

易知，M,N为椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的两个焦点，

由椭圆的定义可知，$|AN|+|AM|=2\times 2=4$，$|BN|+|BM|=2\times 2=4$，

所以$\triangle ABM$的周长为8，

由图可知，$\triangle PQM$的周长不小于8，故C不正确；

对于D，设曲线$C:\frac{x^4}{16}+y^4=1$上的点(x,y)，则该点到原点O的距离为$\sqrt{x^2+y^2}$，

因为$\frac{x^4}{16}+y^4=1$，所以设$\frac{x^2}{4}=\cos\alpha$，$y^2=\sin\alpha$，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

则$x^2+y^2=4\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{17}(\sin\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}})=\sqrt{17}\sin(\alpha+\varphi)$，其中$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{17}}$，

$\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{17}}$，

所以当$\sin(\alpha+\varphi)=1$时，x^2+y^2取得最大值$\sqrt{17}$，$\sqrt{x^2+y^2}$取得最大值$17^{\frac{1}{4}}$．故D正确；

故选：ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $f(x)=\begin{cases} f(x+1), x<4, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, x\geq 4 \end{cases}$，则 $f(\log_2 3)=$______.

【答案】$\frac{1}{24}$

【解析】

【分析】根据分段函数的解析式计算可得；

【详解】$\because f(x)=\begin{cases} f(x+1), x<4 \\ (\frac{1}{2})^x, x\geq 4 \end{cases}$，

$\therefore f(\log_2 3)=f(\log_2 3+1)=f(\log_2 3+2)=f(\log_2 3+3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3+3}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$.

故答案为：$\frac{1}{24}$.

14. 已知：$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,2)$，$E(-1,0)$，$F(1,0)$，一束光线从 F 点出发发射到 BC 上的 D 点经 BC 反射后，再经 AC 反射，落到线段 AE 上（不含端点）FD 斜率的范围为__________.

【答案】$(4,+\infty)$

【解析】

【分析】先作出 F 关于 BC 的对称点 P，再作 P 关于 AC 的对称点 M，因为光线从 F 点出发射到 BC 上的 D 点经 BC 反射后，反射光线的反向延长线经过 F 关于直线 BC 的对称点 P 点，又因为再经 AC 反射，反射光线经过 P 关于直线 AC 的对称点，所以只需连接 MA,ME 交 AC 与点 N，连接 PN,PA 分别交 BC 为点 G,H，则 G,H 之间即为点 D 的变动范围．再求出直线 FG,FH 的斜率即可.

【详解】$\because A(-2,0),B(2,0),C(0,2)$，$\therefore$直线 BC 方程为 $x+y-2=0$，直线 AC 方程为 $x-y+2=0$，

如图，作 F 关于 BC 的对称点 P，则 $P(2,1)$，

再作 P 关于 AC 的对称点 M，则 $M(-1,4)$，

连接 MA,ME 交 AC 与点 N，则直线 ME 方程为 $x=-1$，

$\therefore N(-1,1)$，

连接 PN,PA 分别交 BC 为点 G,H，

则直线 PN 方程为 $y=1$，直线 PA 方程为 $x-4y+2=0$，

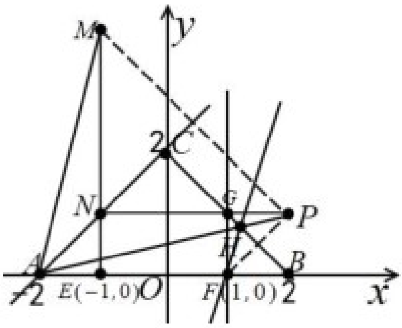
$\therefore G(1,1),H\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$，连接 GF,HF，

则 G,H 之间即为点 D 的变动范围.

$\because$ 直线 FG 方程为 $x=1$，直线 FH 的斜率为 $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}-1}=4$

$\therefore FD$ 斜率的范围为 $(4,+\infty)$

故答案为：$(4,+\infty)$.



【点睛】本题主要考查入射光线与反射光线之间的关系，入射光线与反射光线都经过物体所成的像，据此就可找到入射点的范围，解决此类问题时，关键在于求出点关于直线的对称点，属于中档题.

15. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-n+2^n-1(n\in\mathbf{N}^+)$，则 $d+q$ 的值是_______.

【答案】4

【解析】

【分析】结合等差数列和等比数列前 n 项和公式的特点，分别求得 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的公差和公比，由此求得 $d+q$.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，根据题意 $q\neq 1$.

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $P_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，

等比数列$\{b_n\}$的前n项和公式为$Q_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{b_1}{1-q}q^n+\frac{b_1}{1-q}$，

依题意$S_n=P_n+Q_n$，即$n^2-n+2^n-1=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n-\frac{b_1}{1-q}q^n+\frac{b_1}{1-q}$，

通过对比系数可知$\begin{cases}\frac{d}{2}=1\\a_1-\frac{d}{2}=-1\\q=2\\\frac{b_1}{1-q}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=2\\a_1=0\\q=2\\b_1=1\end{cases}$，故$d+q=4$.

故答案为：4

【点睛】本小题主要考查等差数列和等比数列的前n项和公式，属于中档题.

16. 已知函数$f(x)=e^x-aln(ax-a)+a(a>0)$，若关于$x$的不等式$f(x)>0$恒成立，则实数$a$的取值范围为______

【答案】$(0,e^2)$

【解析】

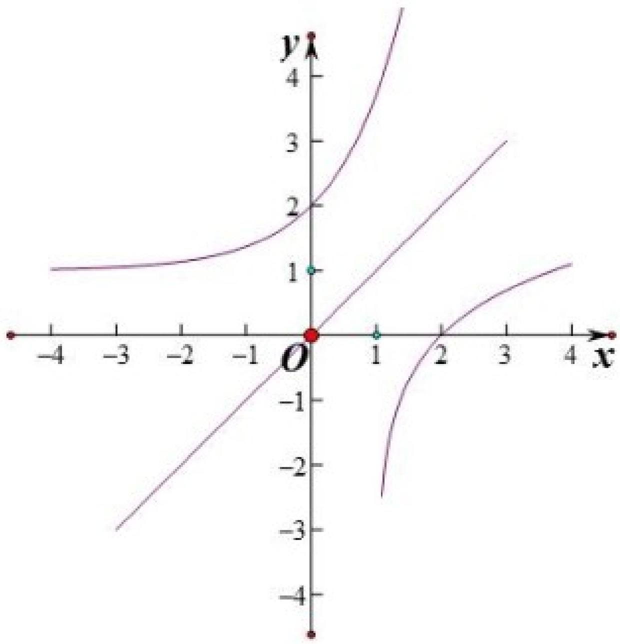
【分析】将不等式$f(x)>0$恒成立转化为$\frac{e^x}{a}+1>ln(ax-a)$在$(1,+\infty)$上恒成立,进一步转化为$\frac{e^x}{a}+1>x$恒成立，即$a<\frac{e^x}{x-1}$恒成立. 再构造函数, 利用导数求最值可解决.

【详解】易求得函数$f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$，由$f(x)=e^x-aln(ax-a)+a>0$，

得$\frac{e^x}{a}+1>ln(ax-a)$，

因为函数$y=\frac{e^x}{a}+1$与函数$y=ln(ax-a)$互为反函数，

其图象关于直线$y=x$对称，



所以要使得 $f(x)>0$ 恒成立，

只需 $\dfrac{e^x}{a}+1>x$ 恒成立，即 $a<\dfrac{e^x}{x-1}$ 恒成立，

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$，

$g(x)$ 在 $(1,2)$ 上递减，在 $(2,+\infty)$ 递增，

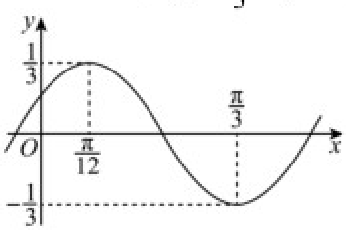
可知当 $x=2$ 时，$g(x)$ 取得最小值 e^2，

所以 $a<e^2$，又因为 $a>0$，所以 a 的取值范围是 $(0,e^2)$.

【点睛】本题考查了等价转化思想,不等式恒成立问题.属中档题.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的图象如图所示.



（1）求函数 $f(x)$ 的对称中心；

（2）先将函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 3 倍（横坐标不变），然后将得到的函数图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），最后将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到函数 $y=g(x)$ 的图象.若 $|g(x)-t|\le 1$ 对任意的 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

【答案】（1）$\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

（2）$[0,1]$

【解析】

【分析】（1）根据函数图象求得 $f(x)$ 的解析式，然后利用整体代入法求得 $f(x)$ 的对称中心.

（2）利用三角函数图象变换的知识求得 $g(x)$ 的解析式，根据 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$ 上的值域转化不等式 $|g(x)-t|\le 1$，由此求得 t 的取值范围.

【小问 1 详解】

由图可知：$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=4$，$f(x)=\frac{1}{3}\sin(4x+\varphi)$，

又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{3},\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1,\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)=\frac{1}{3}\sin\left(4x+2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $4x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

则 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

【小问 2 详解】

由题 $g(x)=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)$.

（2）先将函数 $y=f\left(x\right)$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 3 倍（横坐标不变），然后将得到的函数图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），最后将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象.若 $\left|g\left(x\right)-t\right|\leq 1$ 对任意的 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

【答案】（1）$\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

（2）$[0,1]$

【解析】

【分析】（1）根据函数图象求得 $f\left(x\right)$ 的解析式，然后利用整体代入法求得 $f\left(x\right)$ 的对称中心.

（2）利用三角函数图象变换的知识求得 $g\left(x\right)$ 的解析式，根据 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$ 上的值域转化不等式 $\left|g\left(x\right)-t\right|\leq 1$，由此求得 t 的取值范围.

【小问 1 详解】

由图可知：$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=4$，$f\left(x\right)=\frac{1}{3}\sin\left(4x+\varphi\right)$，

又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{3},\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1,\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}\sin\left(4x+2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $4x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

则 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f\left(x\right)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

【小问 2 详解】

由题 $g\left(x\right)=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)$.

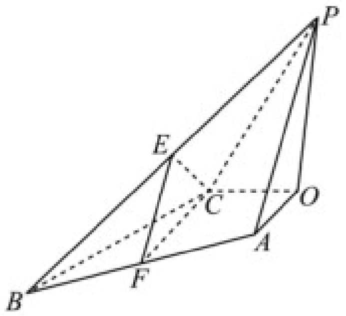
当 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$, $2x+\frac{5\pi}{6}\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 时， $g(x)\in[0,1]$.

因为 $|g(x)-t|\le 1$ 对任意的 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$ 恒成立，

则 $\begin{cases} g(x)_{\max}\le 1+t \\ g(x)_{\min}\ge -1+t \end{cases}$.

所以 $t\in[0,1]$.

18. 如图，在四棱锥 $P-OABC$ 中，已知 $OA=OP=1$， $CP=2$， $AB=4$， $\angle CPO=\frac{\pi}{3}$， $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$， $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$， E 为 PB 中点， F 为 AB 中点.



（1）证明：平面 CEF // 平面 PAO；

（2）若 $PA=\sqrt{3}$，求平面 POC 与平面 PAB 所成夹角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析；

（2） $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

【解析】

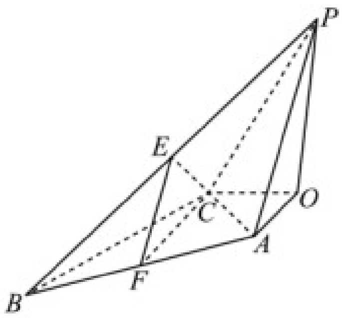
【分析】（1）根据线面平行及面面平行的判定定理即得；

（2）方法一，延长CO与 BA 交于 H，由题可得面 $PCO\perp$ 面 POA，过A作 $AM\perp PO$，过A作 $AN\perp PH$，进而可得 $\angle ANM$ 即为面 POC 与面 PAB 所成二面角的平面角，结合条件即得；

方法二，利用坐标法，根据面面角的向量求法即得.

【小问1详解】

连接 AC，∵ E 为 PB 中点， F 为 AB 中点，



$\therefore EF//PA$，又 $EF\not\subset$ 面 PAO，$PA\subset$ 面 PAO，

$\therefore EF//$ 面 PAO，

在 $\triangle PCO$ 中，$OP=1$，$CP=2$，$\angle CPO=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore OC^2=OP^2+CP^2-2OP\cdot CP\cos\angle CPO=1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，即 $OC=\sqrt{3}$，

在 $\triangle ACO$ 中，$OA=1$，$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$\therefore AC=2$，$\angle OAC=\frac{\pi}{3}$，

在 $\triangle ACB$ 中，$AB=4$，$\angle ABC=\frac{\pi}{6}$，$AC=2$，$\sin\angle ACB=\dfrac{AB\cdot\sin\angle ABC}{AC}=1$，

$\therefore \angle ACB=\frac{\pi}{2}$，$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，$\therefore \angle OAB=\frac{2\pi}{3}$，

$\because F$ 为 AB 中点，$\therefore CF=\frac{1}{2}AB=2$，$\angle CFB=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore OA//CF$，又 $\because CF\not\subset$ 面 PAO，$OA\subset$ 面 PAO，

$\therefore CF//$ 面 PAO，又 $\because CF\cap EF=F$，CF，$EF\subset$ 面 CEF，

$\therefore$ 平面 $CEF//$ 平面 PAO；

【小问 2 详解】

解法一：延长 CO 与 BA 交于 H，连 PH，则面 $PAB\cap$ 面 $POC=PH$，

在 $\triangle PCO$ 中，$OP=1$，$CP=2$，$OC=\sqrt{3}$，所以 $OC\perp OP$，

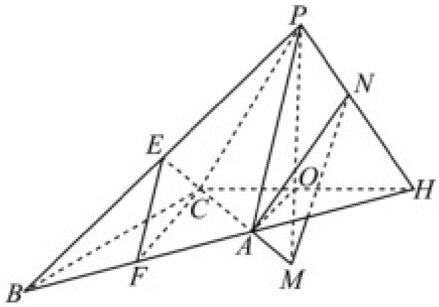
又 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$OA\perp OC$，$PO\cap OA=O$，$PO,OA\subset$ 面 POA，

$\therefore CO\perp$ 面 POA，$CO\subset$ 面 PCO，

$\therefore$ 面 $PCO\perp$ 面 POA，

在面 PCO 内过 A 作 $AM\perp PO$，则 $AM\perp$ 面 PCO，

$\because PH\subset$ 面 PCO，$\therefore AM\perp PH$，



过 A 作 $AN \perp PH$，连 MN，$\because AM \cap AN = A$，$AM \subset$ 面 AMN，$AN \subset$ 面 AMN，

$\therefore PH \perp$ 面 AMN，$MN \subset$ 面 AMN，

$\therefore PH \perp MN$，

$\therefore \angle ANM$ 即为面 POC 与面 PAB 所成二面角的平面角，

$\because OP = OA = 1$，$PA = \sqrt{3}$，

$\therefore \angle POA = \dfrac{2\pi}{3}$，$AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because CF = 2$，$OA // CF$，

$\therefore OH = \sqrt{3}$，$AH = 2$，$PH = 2$，又 $PA = \sqrt{3}$，

$\therefore 2AN = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$，$AN = \dfrac{\sqrt{39}}{4}$，$MN = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，

$$\therefore \cos \angle ANM = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

解法二：在 $\triangle PCO$ 中，$OP = 1$，$CP = 2$，$OC = \sqrt{3}$，所以 $OC \perp OP$，

又 $\angle AOC = \dfrac{\pi}{2}$，$OA \perp OC$，$OP \cap OA = O, OP, OA \subset$ 平面 AOP，

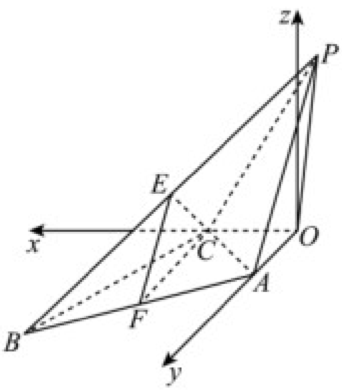
所以 $OC \perp$ 平面 AOP，$OC \subset$ 平面 $OABC$，

所以平面 $AOP \perp$ 平面 $OABC$，

又 $\because OP = OA = 1$，$PA = \sqrt{3}$，

$\therefore \angle POA = \dfrac{2\pi}{3}$，

以 OC 为 x 轴，OA 为 y 轴，过 O 且垂直于面 $OABC$ 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系，



则 $O(0,0,0)$，$A(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$B(2\sqrt{3},3,0)$，$P\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设平面 POC 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OP}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},0,0)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\\x_1=0\end{cases}$，令 $z_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，$\therefore\overrightarrow{n_1}=(0,\sqrt{3},1)$，

设平面 PAB 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3},2,0)$

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{3}x_2+2y_2=0\\-\frac{3}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\end{cases}$ 令 $x_2=1$，则 $y_2=-\sqrt{3}$，$z_2=-3$，

$\therefore\overrightarrow{n_2}=(1,-\sqrt{3},-3)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=-\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

∴平面 POC 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项都不为 0，$a_1=2$，$a_2=4$，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_na_{n+1}=4S_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=a_1\mathrm{C}_n^1+a_2\mathrm{C}_n^2+a_3\mathrm{C}_n^3+\cdots+a_{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}+a_n\mathrm{C}_n^n$，求数列 $\left\{\frac{b_n+2^{n+1}}{b_nb_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】（1）$a_n=2n$，$n\in\mathrm{N}^*$；

（2）$T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$

【解析】

【分析】（1）利用 S_n 与 a_n 的关系，得到 $a_{n+1}-a_{n-1}=4$，再利用隔项等差数列的性质，分别求出 n 为奇数与 n 为偶数时的通项 a_n，进而可得答案.

（2）利用倒序相加，求得 $b_n=n\cdot 2^n$，整理得 $\frac{b_n+2^{n+1}}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$，进而利用裂项求和法，得到 T_n

【小问 1 详解】

$n\geq 2$ 时，$a_na_{n+1}=4S_n$，$a_{n-1}a_n=4S_{n-1}$，两式相减，可得 $a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=4a_n$，由题意得 $a_n\neq 0$，可得 $a_{n+1}-a_{n-1}=4$，则有

当 n 为奇数时，$a_1,a_3,a_5,\cdots,a_n$ 为等差数列，$a_n=a_1+4\cdot(\frac{n+1}{2}-1)=2n$，

当 n 为偶数时，$a_2,a_4,a_6,\cdots,a_n$ 为等差数列，$a_n=a_2+4\cdot(\frac{n}{2}-1)=2n$，

$\therefore a_n=2n(n\in \mathrm{N}^*)$

【小问 2 详解】

$b_n=a_1\mathrm{C}_n^1+a_2\mathrm{C}_n^2+\cdots+a_{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}+a_n\mathrm{C}_n^n$，

$b_n=a_n\mathrm{C}_n^n+a_{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}+\cdots+a_2\mathrm{C}_n^2+a_1\mathrm{C}_n^1$，利用倒序相加，可得

$2b_n=(a_1+a_{n-1})(\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n)+2a_n\mathrm{C}_n^n=2n(2^n-2)+4n=2n\cdot 2^n$，

解得 $b_n=n\cdot 2^n$，

$\therefore \frac{b_n+2^{n+1}}{b_nb_{n+1}}=\frac{n\cdot 2^n+2^{n+1}}{n\cdot 2^n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$，

$\therefore T_n=\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 2^2}+\frac{1}{2\times 2^2}-\frac{1}{3\times 2^3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$

20. 2022 年 12 月 15 至 16 日，中央经济工作会议在北京举行.关于房地产主要有三点新提法，其中“住房改善”位列扩大消费三大抓手的第一位.某房地产开发公司旗下位于生态公园的楼盘贯彻中央经济工作会议精神，推出了为期 10 天的促进住房改善的惠民优惠售房活动，该楼盘售楼部统计了惠民优惠售房活动期间到

访客户的情况，统计数据如下表：(注：活动开始的第 i 天记为 x_i，第 i 天到访的人次记为 y_i，$i=1$，2，3，…)

x_i（单位：人次）	1	2	3	4	5	6	7
y_i（单位：人次）	12	22	42	68	132	202	392

（1）根据统计数据，通过建模分析得到适合函数模型为 $y=c\cdot d^x$（c，d 均为大于零的常数）.请根据统计数据及上表中的数据，求活动到访人次 y 关于活动开展的天次 x 的回归方程，并预测活动推出第 8 天售楼部来访的人次；

（2）该楼盘营销策划部从有意向购房的客户中，随机通过电话进行回访，统计有效回访发现，客户购房意向的决定因素主要有三类：A 类是楼层的品质与周边的生态环境，B 类是楼盘的品质与房子的设计布局，C 类是楼盘的品质与周边的生活与教育配套设施.统计结果如下表：

类别	A 类	B 类	C 类
频率	0.4	0.2	0.4

从被回访的客户中再随机抽取 3 人聘为楼盘的代言人，视频率为概率，记随机变量 X 为被抽取的 3 人中 A 类和 C 类的人数之和，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

参考数据：其中 $v_i=\lg y_i$，$\bar{v}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}v_i=1.84$，$\sum_{i=1}^{7}x_iv_i=58.55$，$10^{0.84}\approx 6.9$；

参考公式：对于一组数据 (u_1,v_1)，(u_2,v_2)，…，(u_n,v_n)，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小一乘估计公式分别为：$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$；

【答案】（1）$\hat{y}=6.9\times 10^{0.25x}$；当 $x=8$ 时，$\hat{y}=6.9\times 10^{0.25\times 8}=690$.

（2）$\frac{12}{5}$，分布列见解析

【解析】

【分析】（1）将 $y=c\cdot d^x$ 转换成 $y=x\cdot \lg d+\lg c$，由最小二乘法求回归直线方程，再换回 $y=c\cdot d^x$ 的形式即可；

（2）根据题意 $X\sim B(3,\frac{4}{5})$，结合二项分布的概率公式及期望公式即可求解.

【小问 1 详解】

由 $y=c\cdot d^x$ 可得 $\lg y=x\cdot\lg d+\lg c$，

由 $v_i=\lg y_i$，$\bar{v}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}v_i=1.84$，$\sum_{i=1}^{7}x_iv_i=58.55$，

则 $\bar{x}=4$，$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2=140$，

所以 $\lg d=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{7}x_i^2-7\bar{x}^2}=\frac{58.55-7\times4\times1.84}{140-7\times4^2}\approx0.25$，

$\lg c=\bar{v}-\bar{x}\cdot\lg d=1.84-4\times0.25=0.84$，所以 $\lg y=0.25x+0.84$，

则所求回归方程为 $\hat{y}=10^{0.84+0.25x}=6.9\times10^{0.25x}$，

当 $x=8$ 时，$\hat{y}=6.9\times10^{0.25\times8}=690$，

所以第 8 天售楼部来访的人次大约为 690．

【小问 2 详解】

由题意得，A 类和 C 类被抽到的概率为 $0.4+0.4=0.8$，

X 的可能取值为 $0,1,2,3$，且 $X\sim B(3,\frac{4}{5})$，

所以 $P(X=0)=C_3^0\times(\frac{4}{5})^0\times(\frac{1}{5})^3=\frac{1}{125}$；$P(X=1)=C_3^1\times(\frac{4}{5})^1\times(\frac{1}{5})^2=\frac{12}{125}$；

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{4}{5})^2\times(\frac{1}{5})^1=\frac{48}{125}$；$P(X=3)=C_3^3\times(\frac{4}{5})^3\times(\frac{1}{5})^0=\frac{64}{125}$；

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

所以 $E(X)=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$．

21. 已知双曲线 E 的顶点为 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，过右焦点 F 作其中一条渐近线的平行线，与另一条渐近线交于点 G，且 $S_{\triangle OFG}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$．点 P 为 x 轴正半轴上异于点 B 的任意点，过点 P 的直线 l 交双曲线于 C，D 两点，直线 AC 与直线 BD 交于点 H．

（1）求双曲线 E 的标准方程；

（2）求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}$ 为定值.

【答案】（1）$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据题意表示出 G 点的横坐标，求出纵坐标，表示面积即可求解；

（2）联立直线与双曲线方程，根据韦达定理证明求解.

【小问 1 详解】

设双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，易知 $a=1$.

由题意可知：$\triangle OFG$ 为等腰三角形，则 $x_G=\dfrac{c}{2}$，代入 $y=\dfrac{b}{a}x$ 得：

$y_G=\dfrac{bc}{2a}=\dfrac{bc}{2}$，则 $S_{\triangle OFG}=\dfrac{1}{2}\times c\times\dfrac{bc}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

又 $c^2=a^2+b^2=1+b^2$，则解得 $b=\sqrt{2}$，

则双曲线 $E:x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.

【小问 2 详解】

设直线 l 的方程为：$x=ty+m$，（$m>0$ 且 $m\neq1$），$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=ty+m\\ x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消 x 得：$\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)y^2+2mty+m^2-1=0$，

$y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{t^2-\dfrac{1}{2}}$，$y_1y_2=\dfrac{m^2-1}{t^2-\dfrac{1}{2}}$，$y_1y_2=\dfrac{m^2-1}{-2mt}(y_1+y_2)$.

$AC:y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，① $BD:y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，②

联立①②，解得：$x_H=\dfrac{y_2x_1+y_1x_2+y_2-y_1}{y_2x_1-y_1x_2+y_2+y_1}$.

又 $y_2x_1=y_2(ty_1+m)=ty_2y_1+my_2$，同理，$y_1x_2=ty_1y_2+my_1$，

把它们代入 x_H，得 $x_H=\dfrac{2ty_1y_2+m(y_1+y_2)+y_2-y_1}{m(y_2-y_1)+y_2+y_1}=\dfrac{-\dfrac{m^2-1}{m}(y_1+y_2)+m(y_1+y_2)+y_2-y_1}{m(y_2-y_1)+y_2+y_1}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{m}(y_1+y_2)+y_2-y_1}{m(y_2-y_1)+y_2+y_1}=\dfrac{1}{m}\dfrac{y_1+y_2+m(y_2-y_1)}{m(y_2-y_1)+y_2+y_1}=\dfrac{1}{m}$，

故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=mx_H=m\times\dfrac{1}{m}=1$，得证.

22. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\sin x+\cos x$.

（1）当 $x\in[0,\pi]$ 时，求证：$f(x)>0$；

（2）若 $f(x)\le ax+1$ 对 $x>-1$ 恒成立，求 a.

【答案】（1）证明见解析

（2）$a=2$

【解析】

【分析】（1）求导后，分别在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$、$x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 和 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ 的情况下，根据 $f'(x)$ 的正负确定 $f(x)$ 的单调性，根据每段区间内都有 $f(x)_{\min}>0$ 可证得结论；

（2）将问题转化为 $g(x)=f(x)-ax-1\le0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，根据 $g(0)=0$ 和最值点的特征可确定 $x=0$ 为 $g(x)$ 的极大值点，由极值点定义可求得 $a=2$；代回函数中验证，利用导数可说明当 $a=2$ 时，$g(x)\le0$，由此可确定其符合题意.

【小问 1 详解】

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\cos x-\sin x=\dfrac{1}{x+1}-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$；

①当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right]$，$\therefore\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\in[-1,0]$，

又 $\dfrac{1}{x+1}>0$，$\therefore f'(x)>0$，\ $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，

$\therefore f(x)\ge f(0)=\ln1+\sin0+\cos0=1$，即 $f(x)>0$；

②当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$时，$x-\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，此时$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$单调递增，

又$y=\frac{1}{x+1}$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递减，$\therefore f'\left(x\right)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递减，

$\because f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi+4}>0$，$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{4}{3\pi+4}-\sqrt{2}<0$，

$\therefore \exists x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，使得$f'\left(x_0\right)=0$，

$\therefore$当$x\in\left(\frac{\pi}{4},x_0\right)$时，$f¢(x)>0$；当$x\in\left(x_0,\frac{3\pi}{4}\right]$时，$f'\left(x\right)<0$；

$\backslash\ f\left(x\right)$在$\left(\frac{\pi}{4},x_0\right)$上单调递增，在$\left(x_0,\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递减，

又$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\frac{\pi}{4}+1\right)+\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\ln\left(\frac{\pi}{4}+1\right)+\sqrt{2}>0$，

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\ln\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)+\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=\ln\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)>0$，

$\therefore$当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$时，$f\left(x\right)>0$；

③当$x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$时，$x-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$，$\therefore\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[1,\sqrt{2}\right)$，

又$\frac{1}{x+1}<\frac{2}{\pi+2}<1$，$\therefore f'\left(x\right)<0$，$\backslash\ f\left(x\right)$在$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$上单调递减，

$\therefore f\left(x\right)\geq f\left(\pi\right)=\ln\left(\pi+1\right)+\sin\pi+\cos\pi=\ln\left(\pi+1\right)-1>0$，即$f\left(x\right)>0$；

综上所述：当$x\in\left[0,\pi\right]$时，$f\left(x\right)>0$.

【小问 2 详解】

令$g\left(x\right)=f\left(x\right)-ax-1=\ln\left(x+1\right)+\sin x+\cos x-ax-1$，

则$g\left(x\right)\leq 0$在$\left(-1,+\infty\right)$上恒成立；

$\because g\left(0\right)=\ln 1+\sin 0+\cos 0-1=0$，$\therefore g\left(x\right)_{\max}=g\left(0\right)$，

$\therefore x=0$为$g\left(x\right)$的一个极大值点，

又 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\cos x-\sin x-a$，$\therefore g'(0)=1+\cos 0-\sin 0-a=2-a=0$，解得：$a=2$；

当 $a=2$ 时，由 $\cos x-1\le 0$ 知：$g(x)=\ln(x+1)+\sin x+\cos x-2x-1\le \ln(x+1)+\sin x-2x$，

令 $h(x)=\ln(x+1)+\sin x-2x$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\cos x-2$，

令 $m(x)=h'(x)$，则 $m'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\sin x$；

当 $x\in(-1,0)$ 时，$m'(x)<-1-\sin x\le 0$，$\therefore h'(x)$ 单调递减，$\therefore h'(x)>h'(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\cos x-2<1+1-2=0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

$\therefore h(x)\le h(0)=0$，$\therefore g(x)\le h(x)\le 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，符合题意；

综上所述：$a=2$.

【点睛】思路点睛：本题考查利用导数证明不等式、导数中的恒成立问题；本题求解恒成立中的参数值的基本思路是：通过函数的最值，结合自变量区间和函数最值只能在极值点或区间端点处取得的特征，确定函数的极值点，从而求解出参数值；易错点是求解出参数值后，忽略验证的过程，导致解析过程不够严谨.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。